

УДК 517(075.8)
ББК 22.161я73
Г83

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М. В. Ломоносова

Рецензенты:

к. ф.-м.н. А. В. Домрина;
д. ф.-м.н. А. В. Ильин

Григорьев, Евгений Александрович.

Г83 Введение в комплексный анализ: теория и практика : учебное
пособие / Е. А. Григорьев. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва :
Издательский отдел факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова
(лицензия ИД N 05899 от 24.09.2001 г.); МАКС Пресс, 2019. – 304 с.
ISBN 978-5-89407-591-4 (ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова)
ISBN 978-5-317-06000-8 (МАКС Пресс)

Учебное пособие отражает опыт преподавания начал теории функций
комплексного переменного студентам факультета ВМК МГУ, обучающимся
по программе бакалавра. Книга содержит большое количество примеров
и разобранных типовых задач. Каждый параграф завершается набором
вопросов и заданий для самостоятельной работы.

Рекомендуется студентам физико-математических специальностей
вузов.

Ключевые слова: аналитическая (регулярная) функция, интегрирование
функций комплексного переменного, ряд Лорана, вычет, конформное
отображение.

Научная библиотека МГУ



67100091

НАУЧНАЯ
БИБЛИОТЕКА
МГУ 7

ISBN 978-5-89407-591-4
ISBN 978-5-317-06000-8

© Григорьев Е. А., 2015
© Григорьев Е. А., 2019, с изменениями
© Факультет ВМК МГУ имени М.В. Ломоносова, 2019
© Оформление. ООО «МАКС Пресс», 2019

3БН
Г-834

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Основные понятия комплексного анализа	
1. Комплексные числа и их свойства	7
2. Кривые на плоскости. Множества на комплексной плоскости	24
3. Последовательности и ряды комплексных чисел	35
4. Функции комплексного переменного. Непрерывность	42
5. Дифференцируемость ФКП. Условия Коши-Римана	56
6. Аналитические функции. Связь аналитичности с гармоничностью	65
Глава 2. Конформные отображения. Основные элементарные функции	
7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной	75
8. Дробно-линейная функция и ее свойства	84
9. Степенная функция и обратная к ней	102
10. Показательная и логарифмическая функции	114
11. Функция Жуковского	119
Глава 3. Интегрирование ФКП	
12. Определение и основные свойства интеграла	127
13. Интегральная теорема Коши	136
14. Интегральная формула Коши и ее следствия	142
15. Существование производных всех порядков у аналитической функции	149
16. Первообразная и неопределенный интеграл. Теорема Морера	156

Глава 4. Ряды аналитических функций

- 17. Равномерно сходящиеся функциональные ряды ... 164
- 18. Степенные ряды. Ряд Тейлора 170
- 19. Единственность определения аналитической функции 182
- 20. Понятие аналитического продолжения 188

Глава 5. Ряды Лорана и классификация особых точек

- 21. Понятие ряда Лорана и свойства его суммы 200
- 22. Изолированные особые точки однозначной функции 212

Глава 6. Теория вычетов и ее применение

- 23. Вычеты и их вычисление 224
- 24. Основная теорема о вычетах. Вычисление интегралов с помощью вычетов 234
- 25. Применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов 239
- 26. Вычисление несобственных интегралов (продолжение) 252
- 27. Суммирование рядов с помощью вычетов 267

Глава 7. Элементы геометрической теории

- 28. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше 273
- 29. Свойства конформных отображений 282
- 30. Принцип максимума 287

Список литературы 291

Ответы к задачам и упражнениям 293

Из предисловия к первому изданию

В основу настоящего учебного пособия положены материалы лекций, которые читались автором на протяжении многих лет студентам факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ, обучавшимся по программе бакалавриата. Книга содержит семь глав, тематика традиционна для вводного семестрового курса теории функций комплексного переменного. От слушателей требуется владение основами математического анализа в объеме первых трёх семестров.

Специфика пособия состоит в подробности изложения и насыщенности текста примерами и разбором типовых задач. Сформировавшийся в результате материал, думается, может оказаться полезным и для проведения упражнений по курсу. Этому способствует ещё одна особенность книги – наличие в конце каждого параграфа вопросов для самопроверки и заданий для домашней работы. Таким образом, вниманию читателя предлагается относительно замкнутый учебно-методический комплекс.

С другой стороны, необходимо подчеркнуть, что книга содержит всего лишь введение в комплексный анализ, поэтому только в малой степени даёт представление об одной из красивейших областей классической математики. Любопытные студенты могут продолжить знакомство с предметом, руководствуясь списком литературы, который приведён в конце пособия. Он включает в себя не только источники, так или иначе цитированные в настоящем издании, но и дополнительный перечень книг для дальнейшего изучения.

Автор считает своей приятной обязанностью выразить сердечную благодарность коллегам – доценту А.В. Домриной и профессору А.В. Ильину, чьи замечания и предложения по тексту пособия, несомненно, способствовали его улучшению. Автор также признателен И.В. Гладкому за большой труд по подготовке рисунков для книги.

2015 г.

Предисловие ко второму изданию

Во второе издание учебного пособия внесены изменения и дополнения, наиболее существенные – в §§ 8, §14, §19, §20; добавлен новый §27, посвященный суммированию рядов с помощью вычетов. Пересмотрен набор задач и упражнений для самостоятельной работы (всего их стало более 500), к большинству задач в конце книги приведены ответы. Устранены замеченные неточности и опечатки.

Автор выражает признательность профессору С.Д. Икрамову и профессору В.Н. Денисову, указавшим на ряд погрешностей первого издания.

Е.А. Григорьев,
ноябрь 2018 г.

Глава 1

Основные понятия комплексного анализа

§1. Комплексные числа и их свойства

1.1. Основные определения

Комплексным числом называется упорядоченная пара

$$z = (x; y), \quad \text{где } x, y \in \mathbb{R}.$$

Первый и второй элементы пары $(x; y)$ называются действительной и мнимой частями комплексного числа z соответственно. Обозначения: $x = \operatorname{Re} z$; $y = \operatorname{Im} z$.

Равенство комплексных чисел.

По определению $z_1 = z_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ и } y_1 = y_2$.

Отметим, что понятие "больше" ("меньше") для комплексных чисел не имеет смысла.

На множестве комплексных чисел $\{z\}$ вводятся операции сложения и умножения следующим образом:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2; y_1 + y_2); \quad (1)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; x_1 y_2 + x_2 y_1). \quad (2)$$

Замечание. Множество элементов вида $z = (x; y)$ с операциями сложения (1) и умножения на вещественное число λ :

$$\lambda z = (\lambda x; \lambda y)$$

является линейным пространством. Если в нем ввести метрику

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2},$$

то оно становится обычным евклидовым пространством $\mathbf{R}^2$.

Таким образом, *пространство комплексных чисел* $\mathbf{C}$ — это пространство $\mathbf{R}^2$, наделенное операцией умножения (2).

Легко проверить, что введенные в (1) и (2) операции сложения и умножения подчиняются коммутативному, ассоциативному и дистрибутивному законам.

По определению: $0 = (0; 0)$; $1 = (1; 0)$.

Пусть $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$. Операции *вычитания* и *деления* вводятся как обратные по отношению к (1) и (2) соответственно. При этом

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2; y_1 - y_2); \quad (3)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2}; \frac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} \right), \quad z_2 \neq 0. \quad (4)$$

▷ Равенство (3) очевидно. Для доказательства (4) достаточно проверить, что $\frac{z_1}{z_2} \cdot z_2 = z_1$ <

Множество комплексных чисел $\{z\}$ с введенными выше арифметическими операциями, нулем и единицей является *полем*. Это поле $\mathbf{C}$ — расширение поля действительных чисел $\mathbf{R}$. Заметим, что действительное число x при этом отождествляется с парой $(x; 0)$. Число вида $(0; y)$ называется *чисто мнимым* числом.

1.2. Комплексное сопряжение

Определение. Комплексно сопряженным с числом $z = (x; y)$ называется комплексное число $\bar{z} = (x; -y)$.

Утверждение 1 (свойства комплексного сопряжения).

Имеют место следующие равенства:

- а) $\overline{(\bar{z})} = z$;
- б) $\bar{z} \cdot z = (x^2 + y^2; 0)$;
- в) $\bar{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbf{R}$;
- г) $\overline{z_1 \pm z_2} = \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2$;

д) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2$;

е) $\overline{z_1 : z_2} = \bar{z}_1 : \bar{z}_2, \quad z_2 \neq 0$.

▷ Докажем, например, д). Пусть $z_1 = (x_1; y_1)$, $z_2 = (x_2; y_2)$. Тогда для произведения $z_1 z_2$

$$\bar{z}_1 \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; -x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

С другой стороны, $\bar{z}_1 = (x_1; -y_1)$, $\bar{z}_2 = (x_2; -y_2)$, поэтому в соответствии с (2)

$$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2; -x_1 y_2 - x_2 y_1),$$

что и требовалось <

1.3. Геометрическая интерпретация

Комплексное число $z = (x; y)$ можно рассматривать как координаты точки на плоскости $\mathbf{R}^2$ в декартовой системе координат. Множество $\mathbf{C}$ при этом отождествляется с множеством всех точек плоскости (или множеством векторов с началом в точке $(0; 0)$, т.е. радиусов-векторов соответствующих точек). Эта плоскость называется *комплексной плоскостью* (z), ее ось абсцисс называется *действительной осью*, а ось ординат — *мнимой осью*.

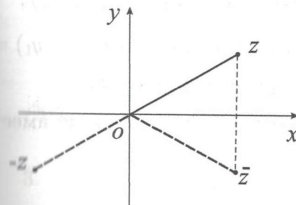


Рис. 1

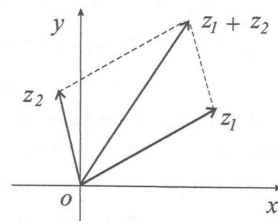


Рис. 2

Отметим, что точки, изображающие числа z и $-z$, симметричны относительно начала координат, а точки, изображающие числа z и $\bar{z}$, симметричны относительно действительной оси (рис. 1).

Изображение комплексных чисел векторами на плоскости позволяет геометрически интерпретировать сложение и вычитание комплексных чисел как соответствующие действия с векторами (см. рис. 2, 3).

1.4. Алгебраическая форма комплексного числа

Введем в $\mathbf{R}^2$ базис, образуемый векторами $\mathbf{1} = (1; 0)$ и $\mathbf{i} = (0; 1)$. Тогда любой элемент $z = (x; y)$ однозначно представляется в виде $z = x\mathbf{1} + y\mathbf{i}$, или, как обычно принято писать, $z = x + iy$.

Это представление называется *алгебраической формой* записи комплексного числа

Заметим, что в соответствии с (2)

$$i^2 = (0; 1) \cdot (0; 1) = (-1; 0) = -1. \quad (5)$$

Тогда сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме можно проводить по обычным правилам действий с многочленами с учетом (5) и приведением подобных членов:

$$\begin{aligned} z_1 \pm z_2 &= (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2); \\ z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + i^2 y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) = \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \end{aligned}$$

Комплексно сопряженное по отношению к z число имеет вид $\bar{z} = (x; -y) = x - iy$.

Примеры.

- Найти действительную и мнимую части комплексного числа $c = \frac{1-i}{1+i}$.
 $\triangleright c = \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1-i)^2}{(1+i)(1-i)} = \frac{(1-i)^2}{2} = -i$. Отсюда $\operatorname{Re} c = 0$, $\operatorname{Im} c = -1$

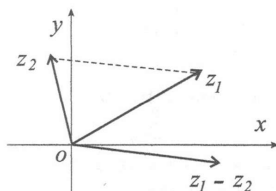


Рис. 3

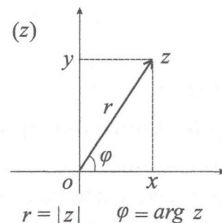


Рис. 4

- Решить уравнение: $(\bar{z})^2 = z$.

$\triangleright$ Пусть $z = x + iy$, $x, y \in \mathbf{R}$. Тогда уравнение можно переписать в виде $(x - iy)^2 = x + iy$.

В соответствии с п. 1.1 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = x, \\ -2xy = y. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы имеем $y = 0$ либо $x = -\frac{1}{2}$. Поэтому

$$y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1; \end{cases} \quad x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ: $z = 0$; $z = 1$; $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\triangleleft$

- Доказать, что многочлен степени n

$$P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$$

с действительными коэффициентами a_k наряду с каждым комплексным корнем z_0 имеет также корень $\bar{z}_0$.

$\triangleright$ В самом деле, по свойствам комплексного сопряжения

$$\overline{P_n(z)} = \overline{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} =$$

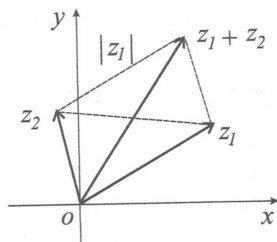


Рис. 5

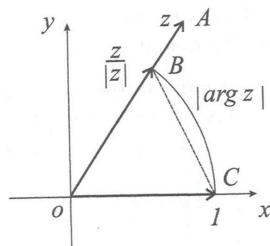


Рис. 6

2. Доказать неравенство

$$\left| \frac{z}{|z|} - 1 \right| \leq |\arg z|. \quad (8)$$

▷ Рис. 6 дает геометрическую интерпретацию (8). Здесь точки A и C соответствуют числам z и 1 , тогда число $\frac{z}{|z|}$ изображается точкой B, где $OB = 1$. В левой части данного неравенства стоит длина хорды BC, которая стягивает дугу длиной $|\arg z|$. ◁

1.6. Показательная форма

Используя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi, \quad (9)$$

равенство (7) можно записать в виде

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) = r e^{i\varphi}, \quad (10)$$

который называется *показательной формой* представления комплексного числа. При этом

$$\operatorname{Re} z = r \cos \varphi, \quad \operatorname{Im} z = r \sin \varphi; \quad r = |z|, \quad \varphi \in \operatorname{Arg} z;$$

$$\bar{z} = r(\cos \varphi - i \sin \varphi) = r e^{-i\varphi}.$$

Замечания. 1) Формула (9) здесь рассматривается как определение $e^{i\varphi}$.

2) Из формулы (9) получаются следующие равенства (они также известны как *формулы Эйлера*):

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} (e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} (e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}). \quad (11)$$

Утверждение 3. Справедливы следующие равенства:

- а) $e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$; б) $e^{i\varphi_1} : e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$;
 в) $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$, $n \in \mathbf{Z}$; г) $|e^{i\varphi}| = 1 \quad \forall \varphi \in \mathbf{R}$;
 д) $e^{i(\varphi + 2\pi k)} = e^{i\varphi}$, $k \in \mathbf{Z}$, в частности, $e^{2\pi ki} = 1$.

▷ Доказательство проводится непосредственными вычислениями. В частности:

$$\text{а) } e^{i\varphi_1} e^{i\varphi_2} = (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) =$$

$$(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \sin \varphi_2) =$$

$$= \cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2) = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$\text{г) } |e^{i\varphi}| = |\cos \varphi + i \sin \varphi| = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1 \quad \triangleleft$$

Примеры

1. Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

- а) $c = 5$; б) $c = -2$; в) $c = i$; д) $c = 1 - i$.

▷ а) Так как $|c| = 5$, $\arg c = 0$, то $c = 5 e^{i2\pi k}$, $k \in \mathbf{Z}$.

б) В этом случае $|c| = 2$, $\arg c = \pi$, тогда $c = 2 e^{i\pi(1+2k)}$, где $k \in \mathbf{Z}$.

в) Поскольку $|c| = 1$, $\arg c = \frac{\pi}{2}$, то $c = e^{i\pi(\frac{1}{2}+2k)}$, $k \in \mathbf{Z}$.

д) Так как $|c| = \sqrt{2}$, $\arg c = -\frac{\pi}{4}$, то $c = \sqrt{2} e^{i\pi(-\frac{1}{4}+2k)}$, $k \in \mathbf{Z}$. ◁

Замечания. 1) В представлении чисел примеров а) – d) в показателе экспоненты используется $\text{Arg } c$. В то же время при проведении арифметических вычислений согласно п. д) утверждения 3 можно ограничиваться каким-то конкретным значением $\varphi \in \text{Arg } c$. Обычно (но не обязательно) берут $\varphi = \arg c$.

2) Для получения модуля и аргумента чисел в пп. а) – d) полезно рассматривать их геометрическое представление.

2. **Формула Муавра.** Используя представление (9) и п. в) утверждения 3, имеем:

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),$$

в частности, $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

3. Найти действительную и мнимую части следующих комплексных чисел:

а) $(1+i)^n + (1-i)^n$; б) $(1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n$.

▷ а) Так как $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $1-i = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}$, то

$$c = (1+i)^n + (1-i)^n = (\sqrt{2})^n \left(e^{i\frac{\pi n}{4}} + e^{-i\frac{\pi n}{4}} \right) =$$

$$2^{\frac{n}{2}} \left(\cos \frac{\pi n}{4} + i \sin \frac{\pi n}{4} + \cos \frac{\pi n}{4} - i \sin \frac{\pi n}{4} \right) = 2^{1+\frac{n}{2}} \cdot \cos \frac{\pi n}{4}.$$

Итак, $\text{Re } c = 2^{1+\frac{n}{2}} \cos \frac{\pi n}{4}$, $\text{Im } c = 0$.

б) Используя формулы Эйлера (9), (11), получаем

$$\begin{aligned} c &= (1 + \cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (1 + e^{i\varphi})^n = \\ &= e^{\frac{in\varphi}{2}} \left(e^{\frac{i\varphi}{2}} + e^{-\frac{i\varphi}{2}} \right)^n = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{n\varphi}{2} + i \sin \frac{n\varphi}{2} \right). \end{aligned}$$

Отсюда

$$\text{Re } c = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \cos \frac{n\varphi}{2}, \quad \text{Im } c = 2^n \cos^n \frac{\varphi}{2} \sin \frac{n\varphi}{2} <$$

4. Найти модуль, аргумент, главное значение аргумента ($\arg z \in (-\pi; \pi]$) следующих комплексных чисел z :

а) $z = (1 + i\sqrt{3})^4$; б) $z = -\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

▷ а) Для числа $c = 1 + i\sqrt{3}$ имеем $r = |c| = 2$, $\arg c = \frac{\pi}{3}$,

тогда $z = c^4 = 2^4 e^{i\frac{4\pi}{3}}$, следовательно,

$$|z| = 16; \quad \text{Arg } z = \left\{ \frac{4\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \right\}; \quad \arg z = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}.$$

б) Очевидно, $|z| = \sqrt{\cos^2 \frac{\pi}{4} + \sin^2 \frac{\pi}{4}} = 1$. Поскольку $\text{tg } \varphi =$

-1 и $\text{Re } z < 0$, $\text{Im } z > 0$, то $\varphi \in \text{Arg } z = \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbf{Z} \right\}$,

откуда $\arg z = \frac{3\pi}{4} <$

1.7. Извлечение корня из комплексного числа

Определение. Комплексное число z называется *корнем n -ой степени* из числа c : $z = \sqrt[n]{c}$, $n \in \mathbf{N}$, $n > 1$, если $z^n = c$.

Заметим сначала, что $\sqrt[0]{0} = 0$.

Исходя из показательной формы представления комплексного числа $c = \rho e^{i\alpha}$, где $c \neq 0$, имеем:

$$z^n = c \Leftrightarrow r^n e^{in\varphi} = \rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho, \\ n\varphi = \alpha + 2\pi k, \end{cases} k \in \mathbf{Z}.$$

Поэтому $r = \sqrt[n]{\rho}$, $\varphi = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} = \frac{\arg c + 2\pi k}{n}$, так что

$$z = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\arg c + 2\pi k}{n}}, \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (12)$$

(Через $\sqrt[n]{\rho}$ обозначен арифметический корень из положительного действительного числа ρ).

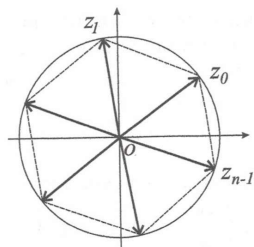


Рис. 7

Из (12) ясно, что для получения всех различных значений $z = z_k$ достаточно взять $k = 0, 1, \dots, (n-1)$. Таким образом, существует ровно n различных значений $\sqrt[n]{c}$ при $c \neq 0$. Геометрически равенство (12) означает, что точки z_k , $k = 0, 1, \dots, (n-1)$, расположены в вершинах правильного n -угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{\rho}$ с центром в точке $z = 0$ (рис. 7).

Примеры

1. Вычислить значения корней а) $\sqrt{-2i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$.

▷ а) 1-ый способ. В соответствии с определением надо найти такое число $z = x + iy$, чтобы $z^2 = -2i$.

Имеем

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0, \\ xy = -1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = y, \\ x^2 = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -y, \\ x^2 = 1 \end{cases}$$

Первая из систем не имеет решений (x и y — действительные числа!), а вторая даёт два решения:

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1, \end{cases} \quad \text{т.е. } z_1 = 1 - i, z_2 = -1 + i.$$

2-ой способ. Так как $c = -2i = 2e^{i(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k)}$, то

$$z_{1,2} = \sqrt{c} = \sqrt{2}e^{i(-\frac{\pi}{4} + \pi k)}, \quad k = 0, 1,$$

т.е.

$$z_1 = \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 1 - i;$$

$$z_2 = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) = -1 + i.$$

б) Так как $c = -1 = e^{i(\pi + 2\pi k)}$, то

$$z_k = \sqrt[4]{-1} = e^{i(\frac{\pi + 2\pi k}{4})}, \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Итак, имеем четыре значения корня:

$$z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}; \quad z_1 = \frac{-1+i}{\sqrt{2}}; \quad z_2 = -\frac{1+i}{\sqrt{2}}; \quad z_3 = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \quad \triangleleft$$

2. Решить уравнения

а) $z^3 = \bar{z}$; б) $z^6 + 7z^3 - 8 = 0$.

▷ а) Ясно, что $z = 0$ — решение. Если $z \neq 0$, то $z = re^{i\varphi}$. Тогда $r^3 e^{3i\varphi} = r e^{-i\varphi}$. Отсюда $r^2 e^{4i\varphi} = 1$, значит, $r = 1$ и $4\varphi = 2\pi k$, т.е. $\varphi = \frac{\pi k}{2}$, так что $z = e^{i\frac{\pi k}{2}}$.

Для получения различных значений достаточно взять $k = 0, \pm 1, 2$. Итак, приходим к решениям $z = \pm 1$; $z = \pm i$.

б) После замены $t = z^3$ имеем квадратное уравнение

$$t^2 + 7t - 8 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -8. \end{cases}$$

Поэтому, вычисляя значения

$$z = \sqrt[3]{1} = e^{i\frac{2\pi k}{3}}, \quad z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt{8}e^{i\frac{\pi + 2\pi k}{3}}, \quad \text{где } k = 0, 1, 2,$$

получаем 6 решений данного уравнения:

$$z = 1, z = \frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3}), z = -2, z = 1 \pm i\sqrt{3} \quad \triangleleft$$

1.8. Расширенная комплексная плоскость. Стереографическая проекция

Если множество всех комплексных чисел $\mathbb{C}$ (комплексную плоскость) дополнить бесконечно удалённой точкой (некоторым условным комплексным числом ∞), то получится расширенная комплексная плоскость $\bar{\mathbb{C}}$, т.е. $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Моделью расширенной комплексной плоскости является так называемая *сфера Римана*, а взаимно однозначное соответствие между точками $\bar{\mathbb{C}}$ и точками этой сферы задается *стереографической проекцией*.

Пусть S — сфера единичного диаметра, которая касается комплексной плоскости в точке O (рис. 8), а P — точка сферы, диаметрально противоположная точке O . Произвольной точке N плоскости сопоставим ту точку $M \in S$, в которой отрезок, соединяющий N с P , пересекает сферу. Легко видеть, что таким образом задано взаимно однозначное соответствие $S \setminus P \leftrightarrow \mathbb{C}$. Если самой точке P сопоставить ∞ , получится взаимно однозначное соответствие $S \leftrightarrow \bar{\mathbb{C}}$. (В рассмотренной модели S и есть сфера Римана).

Введем в трёхмерном пространстве и на комплексной плоскости системы координат соответственно $O\xi\eta\zeta$ и Oxy так, чтобы оси $O\xi, O\eta$ совместились с осями Ox, Oy соответственно (рис. 8).

Утверждение 4. Пусть $z = x + iy$ — точка комплексной плоскости, а $M(\xi, \eta, \zeta)$ — соответствующая ей точка на сфере Римана. Тогда

$$\xi = \frac{x}{1 + |z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1 + |z|^2}, \quad \zeta = \frac{|z|^2}{1 + |z|^2}, \quad (13)$$

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta}, \quad y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \quad (14)$$

$\triangleright$ Сфера радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0, 0, \frac{1}{2})$ описывается уравнением

$$\xi^2 + \eta^2 + \left(\zeta - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = \zeta. \quad (15)$$

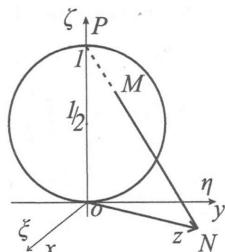


Рис. 8

Точка N , изображающая z , имеет в трёхмерном пространстве координаты $(x, y, 0)$. Заметим сначала, что $N(0, 0, 0) \leftrightarrow M(0, 0, 0)$. Далее рассмотрим точки, отличные от начала координат. Поскольку векторы $\vec{PM} = (\xi, \eta, \zeta - 1)$ и $\vec{PN} = (x, y, -1)$ коллинеарны, то

$$\frac{\xi}{x} = \frac{\eta}{y} = \frac{\zeta - 1}{-1} = k \neq 0.$$

Отсюда

$$\xi = kx, \quad \eta = ky, \quad \zeta = 1 - k.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (15), имеем

$$k^2(x^2 + y^2) + (k - 1)^2 = 1 - k \Leftrightarrow k(x^2 + y^2) = 1 - k,$$

т.е. $k = \frac{1}{1 + |z|^2}$. Таким образом, получаем формулы (13).

Имея в виду, что $k = 1 - \zeta$, приходим к формулам обратного преобразования (14) $\triangleleft$

1.9. Вопросы и задачи.

- Докажите формулу (4).
- Докажите пп. б) и е) утверждения 1.
- Докажите п. б) утверждения 3.
- Найдите $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$, $|z|$, $\operatorname{Arg} z$, $\arg z \in [0; 2\pi)$, если
 - $z = (\sqrt{3} + i)^7$; б) $z = 5i \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{28}$; в) $z = \frac{i^5 - 2}{i^{19} - 1}$;
 - $z = \frac{(1+i)^9}{(1-i)^5}$; е) $z = \left(\frac{1}{4} - i \frac{\sqrt{3}}{4} \right)^7 \cdot (1+i)^{10}$;
 - $z = \frac{(-1+i\sqrt{3})^{30}}{(1-i)^{45}}$; г) $z = -3i \cdot e^{-5i}$;
 - $z = -1 - \cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$; д) $z = \frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{1 + \cos \alpha - i \sin \alpha}$.
- Докажите тождество

$$|z_1 \bar{z}_2 + 1|^2 + |z_1 - z_2|^2 = (1 + |z_1|^2)(1 + |z_2|^2).$$
- Докажите неравенство

$$|z - 1| \leq ||z| - 1| + |z| \cdot |\arg z|.$$
- Пусть $|z_1| = |z_2| = |z_3| > 0$ и $z_1 + z_2 + z_3 = 0$. Докажите, что точки, изображающие числа z_1 , z_2 , z_3 , являются вершинами правильного треугольника.
- Какое из следующих равенств верно, а какое — нет:
 - $\arg z^n = n \arg z$;
 - $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z$;
 - $\operatorname{Arg} z^n = n \operatorname{Arg} z + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$?

9. Пусть $P_n(z)$ — полином n -ой степени. Что можно сказать о его коэффициентах, если:

$$\text{а) } \overline{P_n(z)} = P_n(\bar{z}); \quad \text{б) } \overline{P_n(z)} = -P_n(\bar{z})?$$

10. Пусть $z + \frac{1}{z} = 2 \cos \alpha$. Докажите, что тогда

$$z^n + \frac{1}{z^n} = 2 \cos n\alpha.$$

11. Вычислите значения корней:

$$\text{а) } \sqrt[3]{-64i}; \quad \text{б) } \sqrt{2 - 2\sqrt{3}i}; \quad \text{в) } \sqrt[3]{-2 + 2i}.$$

12. Докажите, что сумма всех значений $\sqrt[n]{1}$ равна нулю.

13. Решите уравнения:

$$\text{а) } z^4 + 4 = 0; \quad \text{б) } z^6 - 64 = 0; \quad \text{в) } z^3 = 27i;$$

$$\text{д) } z^4 + 8 = 8\sqrt{3}i; \quad \text{е) } z^4 + iz^2 + 2 = 0;$$

$$\text{ф) } z^4 + (2-i)z^2 - 2i = 0; \quad \text{г) } z^4 + 3iz^2 + 4 = 0;$$

$$\text{х) } z^5 + iz^3 - 8iz^2 + 8 = 0; \quad \text{и) } z^2 + \bar{z} = 0;$$

$$\text{к) } iz^2 + 2\bar{z} \cdot \operatorname{Im} z = 0; \quad \text{л) } (\bar{z})^3 = 4z;$$

$$\text{м) } z \cdot |z|^2 = 4i\bar{z}; \quad \text{н) } z^2 \cdot \bar{z} = \operatorname{Re} z; \quad \text{о) } \bar{z}^2 \cdot z = \operatorname{Im} z;$$

$$\text{п) } z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 = 0, \quad n \in \mathbb{N}.$$

14. Какое множество на комплексной плоскости соответствует а) экватору сферы Римана; б) нижней полусфере при стереографической проекции?

15. Найдите образ первой четверти комплексной плоскости на сфере Римана.

16. Докажите, что при стереографической проекции окружностям и прямым комплексной плоскости соответствуют окружности на сфере Римана.

Указание. Используйте уравнение окружности и формулы (14).

17. Найдите образ на сфере Римана семейства параллельных прямых комплексной плоскости.
18. Как соотносятся радиусы окружностей, являющихся образами одноимённых параллелей верхней и нижней полусферы Римана?
19. Докажите, что образы $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ точек $M_1, M_2 \in S$, симметричных относительно центра сферы (и отличных от ее полюсов), отвечают условию $z_1 \bar{z}_2 = -1$.
20. Сферическим расстоянием $\rho_S(z_1, z_2)$ между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости называется евклидово расстояние между образами этих точек на сфере Римана. Докажите, что $\rho_S(z_1, z_2) = \frac{|z_1 - z_2|}{\sqrt{|z_1|^2 + 1} \sqrt{|z_2|^2 + 1}}$.
- Указание. Используйте соотношения (13)–(15).

§2. Кривые на плоскости. Множества на комплексной плоскости

2.1. Кривые на плоскости

Пусть на отрезке $\alpha \leq t \leq \beta$ заданы две непрерывные функции $x(t)$ и $y(t)$. Тогда на этом отрезке определена непрерывная комплекснозначная функция действительной переменной

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha; \beta]. \quad (1)$$

Определения.

Задание функции $z = z(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, определяет объект γ на плоскости, называемый *непрерывной кривой*.

Уравнение (1) называется *параметрическим уравнением* этой кривой.

Кривая γ ориентирована по возрастанию независимой переменной t . Говорят, что эта ориентация *индуцирована* пара-

метризацией (1). Точка $z(\alpha)$ является *начальной*, а точка $z(\beta)$ – *конечной* точкой кривой γ .

Кривая, отличающаяся от γ только противоположной ориентацией, обозначается γ^{-1} .

Если существуют такие значения t_1, t_2 , не совпадающие с обоими концами отрезка $[\alpha; \beta]$, что $t_1 \neq t_2$, а $z(t_1) = z(t_2)$, то соответствующая точка на кривой называется *точкой самопересечения*, или *кратной точкой*.

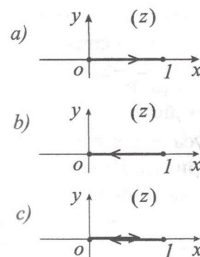


Рис. 9

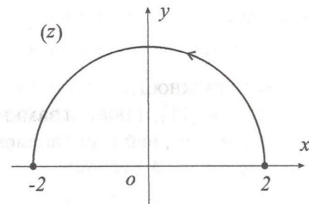


Рис. 10

Непрерывная кривая без точек самопересечения называется *простой*, или *жордановой* кривой.

Непрерывная кривая, у которой совпадают начальная и конечная точки, называется *замкнутой*.

Примеры.

a) $z = t$, $t \in [0; 1]$. Это простая кривая γ – отрезок действительной прямой с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = 1$ (см. рис. 9a)).

b) $z = 1 - t$, $t \in [0; 1]$ – простая кривая γ^{-1} – отрезок действительной прямой с началом в точке $z = 1$ и концом в точке $z = 0$ (см. рис. 9b)).

c) $z = t^2$, $t \in [-1; 1]$.

Уравнением задан дважды проходимый отрезок с началом и концом в точке $z = 1$ (см. рис. 9с)). Это замкнутая кривая, для которой каждая из точек, принадлежащих интервалу $(0; 1)$ вещественной прямой, является точкой самопересечения.

d) $z = \cos t, \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ – та же кривая, что и в п. б).

e) $z = 2e^{it}, \quad t \in [0; \pi]$.

Уравнение задаёт верхнюю полуокружность радиуса 2 с центром в начале координат (рис. 10). Это простая кривая с началом в точке $z = 2$ и концом в точке $z = -2$.

f) $z = -1 + e^{it}, \quad t \in [0; 2\pi]$.

Это окружность единичного радиуса с центром в точке $z = -1$ (рис. 11), простая замкнутая кривая. Положительное направление на ней (определяемое возрастанием параметра) – против часовой стрелки.

$$g) \quad z = \begin{cases} \cos^3 t + i \sin^3 t, & t \in \left[0; \frac{3\pi}{2}\right], \\ \frac{4i}{\pi} \left(t - \frac{7\pi}{4}\right), & t \in \left(\frac{3\pi}{2}; 2\pi\right]. \end{cases}$$

Кривая состоит из трех звеньев астроида и отрезка мнимой прямой, имеет точку самопересечения (рис. 12), т.е. не является простой.

Замечание. Следует подчеркнуть, что множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют (1), вообще говоря не тождественно кривой γ . Во-первых, на кривой имеется ориентация; во-вторых, одна и та же точка плоскости может разниться как точка γ (если соответствует различным значениям параметра) – см. примеры a), b) и c).

С другой стороны, одна и та же кривая может быть параметризована по-разному (см. примеры b) и d)).

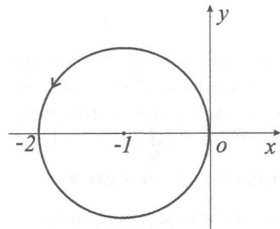


Рис. 11

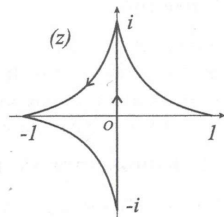


Рис. 12

Определение.

Непрерывная кривая $z(t) = x(t) + iy(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, называется *гладкой*, если функции $x(t)$ и $y(t)$ в её уравнении непрерывно дифференцируемы на отрезке $[\alpha; \beta]$, причем $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 \neq 0$. Другими словами, кривая гладкая, если функция $z(t)$ имеет непрерывную производную $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ и $z'(t) \neq 0$ при всех $t \in [\alpha; \beta]$.

В случае, если кривая замкнута, для обеспечения гладкости требуется ещё выполнение равенства $z'(\alpha+0) = z'(\beta-0)$.

Если $z'(t_0) = 0$ при некотором значении t_0 , соответствующая точка z_0 кривой называется *особой*.

Непрерывная кривая называется *кусочно гладкой*, если её можно разбить на конечное число гладких кривых.

Простую замкнутую кусочно гладкую кривую будем называть *простым замкнутым контуром*, или, короче, *контуром*.

В дальнейшем будем рассматривать только гладкие или кусочно гладкие кривые.

Замечание. Геометрически условие гладкости кривой означает, что в каждой своей точке эта кривая имеет касательную, положение которой меняется непрерывно. Кусочно гладкая кривая имеет касательную всюду, кроме конечного числа точек.

Примеры.

Кривые из пп. а), b), e), f) гладкие; в п. c) кривая кусочно гладкая с особой точкой $z = 0$ (так как $z'(0) = 0$), это замкнутая кривая, не являющаяся замкнутым контуром; кривая п. g) кусочно гладкая с особыми точками $z = \pm 1$, $z = \pm i$.

2.2. Множества на комплексной плоскости

В дальнейшем будут рассматриваться различные множества из $\mathbb{C}$ или $\overline{\mathbb{C}}$.

Определения.

Расстоянием между множествами E_1 и E_2 называется число $\rho = \inf_{z \in E_1, \zeta \in E_2} |z - \zeta|$.

Диаметр множества E равен $d = \sup_{z, \zeta \in E} |z - \zeta|$.

Множество ограничено тогда и только тогда, когда его диаметр конечен.

Круговой окрестностью (или ϵ -окрестностью) точки z_0 ($z_0 \neq \infty$) называется множество $K_\epsilon(z_0) = \{z : |z - z_0| < \epsilon\}$, т.е. круг радиуса ϵ с центром в точке z_0 .

Мы будем также использовать обозначения окрестности K_ϵ , $K(z_0)$ или просто K в зависимости от контекста.

Проколотая ϵ -окрестность точки z_0 – множество $\dot{K}_\epsilon(z_0) = \{z : 0 < |z - z_0| < \epsilon\}$, т.е. круг радиуса ϵ с выброшенным центром z_0 ($z_0 \neq \infty$) (возможные обозначения: $\dot{K}_\epsilon$, $\dot{K}(z_0)$ или просто $\dot{K}$).

Круговая окрестность точки $z_0 = \infty$ в $\mathbb{C}$ и проколотая окрестность бесконечно удалённой точки в $\overline{\mathbb{C}}$ – это множества $K_R(\infty) = \{z : |z| > R\}$, где $R > 0$, и $\dot{K}_R(\infty) = \{z : R < |z| < +\infty\}$ соответственно.

Точка z называется внутренней точкой множества E , если существует её (круговая) окрестность, все точки которой принадлежат E .

Точка z называется внешней по отношению к множеству E , если существует её (круговая) окрестность, все точки которой не принадлежат E .

Если в любой (круговой) окрестности точки z имеются точки как принадлежащие, так и не принадлежащие E , такая точка z называется граничной точкой множества E .

Совокупность всех граничных точек E называется границей множества E (обозначение: ∂E).

Множество, все точки которого внутренние, называется открытым множеством.

Окрестностью точки z_0 будем называть любое открытое множество, содержащее эту точку (а, значит, вместе с ней и некоторую круговую окрестность $K(z_0)$). Обозначения: $U(z_0)$ или U .

Проколотая окрестность точки z_0 – открытое множество, содержащее некоторую проколотую круговую окрестность $\dot{K}(z_0)$, но не содержащее точку z_0 . Обозначения: $\dot{U}(z_0)$ или $\dot{U}$.

Точка z называется предельной точкой множества E , если в любой её окрестности находится бесконечно много точек E .

Множество называется замкнутым, если оно содержит все свои предельные точки (в частности, если ему принадлежит вся граница). Обозначение: для E соответствующее замкнутое множество, или замыкание, – $\bar{E}$.

Множество E называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей E .

Пустое множество D на комплексной плоскости называется областью, если D – открытое и связное множество.

Граница области считается положительно ориентированной, если при обходе по границе область расположена слева.

Область D на плоскости называется односвязной, если любую простую замкнутую кривую, принадлежащую D , мож-

но непрерывной деформацией стянуть к точке из D . В противном случае D является *неодносвязной* областью. На рис. 13 представлены примеры односвязных областей, а на рис. 14 – неодносвязных. Стрелкой указано положительное направление обхода границы.

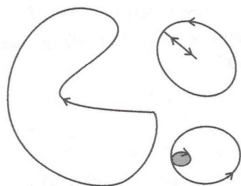


Рис. 13

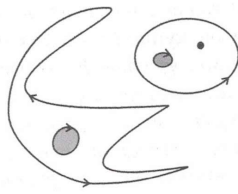


Рис. 14

Теорема (Жордан) (без доказательства).

Простая замкнутая кривая γ разбивает комплексную плоскость $\mathbb{C}$ на две области – внутреннюю (ограниченную кривой γ) и внешнюю, неограниченную, содержащую бесконечно удалённую точку (она также имеет границу γ).¹

Внутреннюю по отношению к границе γ область будем обозначать $\text{int } \gamma$, а внешнюю область обозначим $\text{ext } \gamma$.

Область D на комплексной плоскости односвязная, если для любой простой замкнутой кривой, принадлежащей D , её внутренность также целиком лежит в D .

Примеры.

Введенные выше в §1 понятия и их геометрический смысл можно использовать для задания различных множеств на комплексной плоскости.

а) Открытый круг радиуса $r > 0$ с центром в точке z_0 : $\{z : |z - z_0| < r\}$.

¹ Этот факт совсем не очевиден в свете результата голландского математика Л. Брауэра, доказавшего в 1912 г. существование любого числа областей, имеющих общую границу.

- б) Открытый круг без центра z_0 : $\{z : 0 < |z - z_0| < r\}$.
- с) Замкнутый круг: $\{z : |z - z_0| \leq r\}$.
- д) Внешность круга: $\{z : |z - z_0| > r\}$.
- е) Круговое кольцо с центром в точке z_0 между окружностями радиусов r и R ($0 < r < R$): $\{z : r < |z - z_0| < R\}$.
- ф) Луч, выходящий из начала координат под углом α к действительной оси: $\{z : \arg z = \alpha\}$.
- г) Внутренность угла с вершиной в точке z_0 : $\{z : \alpha < \arg(z - z_0) < \beta\}$ (здесь $\beta - \alpha < 2\pi$).
- h) Верхняя полуплоскость: $\{z : \text{Im } z > 0\}$.
- и) Нижний единичный полукруг (открытый): $\{|z| < 1\} \cap \{\text{Im } z < 0\}$.
- ж) Прямые, параллельные координатным осям: $\{z : \text{Re } z = x_0\}$; $\{z : \text{Im } z = y_0\}$ ($x_0, y_0 \in \mathbb{R}$).
- к) Вертикальная полоса с границами: $\{z : x_1 \leq \text{Re } z \leq x_2\}$, здесь $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.

л) Замкнутый прямоугольник со сторонами, параллельными осям координат: $\{z : x_1 \leq \text{Re } z \leq x_2, y_1 \leq \text{Im } z \leq y_2\}$.

2.3. Примеры множеств, задаваемых уравнениями и неравенствами. Построение таких множеств

1. Записать в комплексной форме уравнения: а) прямой;
- б) окружности.

▷ а) Уравнение прямой на плоскости имеет вид

$$ax + by + d = 0, \quad a^2 + b^2 \neq 0, \quad a, b, d \in \mathbb{R}.$$

Подставляя $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$, $y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$, получаем

$$a(z + \bar{z}) - ib(z - \bar{z}) + 2d = 0 \Leftrightarrow (a - ib)z + (a + ib)\bar{z} + 2d = 0,$$

$$\text{или} \quad \bar{B}z + B\bar{z} + D = 0, \quad (2)$$

где $B = a + ib$, $B \neq 0$, $D = 2d$.

б) Уравнение

$$a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy + d = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \left(y + \frac{c}{a}\right)^2 = \frac{b^2 + c^2 - ad}{a^2},$$

где $a \neq 0$, $b^2 + c^2 - ad > 0$, задаёт окружность на плоскости. После подстановки в исходное уравнение $x = \frac{z + \bar{z}}{2}$,

$$y = \frac{z - \bar{z}}{2i}, \quad x^2 + y^2 = z\bar{z}, \quad \text{имеем}$$

$$a z\bar{z} + b(z + \bar{z}) - ic(z - \bar{z}) + d = 0 \Leftrightarrow a z\bar{z} + (b - ic)z + (b + ic)\bar{z} + d = 0,$$

$$\text{или} \quad A z\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + D = 0, \quad (3)$$

где $A = a$, $B = b + ic$, $D = d$, $B\bar{B} - AD = b^2 + c^2 - ad > 0 <$

2. Указать множества точек комплексной плоскости, удовлетворяющих указанным условиям (рассматриваемые ниже задачи можно решать как аналитически, так и исходя из геометрических представлений).

$$a) |z - 4| = |z + 4i|.$$

$\triangleright$ 1-ый способ. Так как $|z - z_0|$ выражает расстояние между точками z и z_0 , то искомое множество – серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $z = 4$ и $z = -4i$. Очевидно, это прямая $y = -x$, или множество точек комплексной плоскости: $\{z = x - ix, x \in \mathbb{R}\}$ (рис. 15).

2-ой способ. Пусть $z = x + iy$, тогда по определению модуля комплексного числа

$$\sqrt{(x - 4)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y + 4)^2} \Leftrightarrow y = -x <$$

$$b) \operatorname{Re} \frac{1}{z} = c.$$

$\triangleright$ Заметим, что $z \neq 0$. Пусть $z = x + iy$. Так как $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$, то $\frac{x}{x^2 + y^2} = c$. Отсюда

$$1) c = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ — мнимая ось за исключением } z = 0;$$

$$2) c \neq 0, \text{ тогда } x^2 + y^2 = \frac{x}{c} \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{2c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4c^2} -$$

это окружность с центром в точке $z = \frac{1}{2c}$ и радиусом $\frac{1}{2|c|}$ за исключением точки $z = 0$ (рис. 16) $<$

$$c) |z| > 1 + \operatorname{Im} z.$$

$\triangleright$ Перепишем неравенство в виде $\sqrt{x^2 + y^2} > 1 + y$. Ясно, что оно выполнено для всех $y < -1$. При $y \geq -1$ имеем $x^2 > 1 + 2y$.

Итак, искомое множество – часть плоскости, находящаяся под параболой $y = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ (рис. 17) $<$

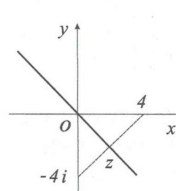


Рис. 15

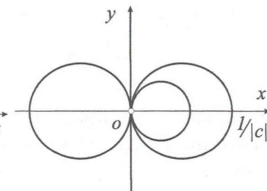


Рис. 16

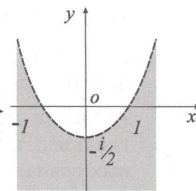


Рис. 17

$$d) |z - \bar{a}| < |az - 1|, \quad \text{где } |a| < 1.$$

$\triangleright$ Используя равенство $|z|^2 = z\bar{z}$ и свойства комплексного сопряжения, проведем преобразования:

$$|z - \bar{a}| < |az - 1| \Leftrightarrow |z - \bar{a}|^2 < |az - 1|^2 \Leftrightarrow$$

$$(z - \bar{a})(\bar{z} - a) < (az - 1)(\overline{az - 1}) \Leftrightarrow |z|^2 + |a|^2 - 1 - |a|^2|z|^2 < 0$$

$$\Leftrightarrow (|z|^2 - 1)(1 - |a|^2) < 0 \Leftrightarrow |z| < 1,$$

так как $|a| < 1$. Таким образом, искомое множество – внутренность единичного круга $<$

2.4. Вопросы и задачи

1. Изобразите следующие кривые на плоскости:

- а) $z = t^2$, $t \in [0; 1]$; б) $z = t^3$, $t \in [0; 1]$;
 в) $z = t^2$, $t \in [-1; 1]$; д) $z = t^3$, $t \in [-1; 1]$;
 е) $z = \sin t$, $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$; ф) $z = \sin t$, $t \in [0; \pi]$;
 г) $z = 1 + e^{it}$, $t \in [-\pi; \pi]$; h) $z = \begin{cases} 1 + e^{it}, & t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right], \\ t - \pi, & t \in (\pi; 2\pi] \end{cases}$;
 и) $z = t + it^2$, $t \in [0; 1]$; j) $z = t^2 + it^4$, $t \in [-1; 1]$;
 к) $z = t + \frac{i}{t}$, $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$; л) $z = \frac{1}{t} + it$, $t \in \left[\frac{1}{2}; 2\right]$;
 м) $z = e^{at}$, $t \in [0; 4\pi]$ ($a \in \mathbb{C}$); н) $z = \frac{1-t^2}{1+t^2} + \frac{2t}{1+t^2}i$,
 $t \in [-1; 1]$; о) $z = ae^{it} + be^{-it}$, $t \in [0; 2\pi]$, a, b — действительные числа.

Какие из этих кривых а) простые; б) замкнутые; в) гладкие; г) кусочно гладкие? Есть ли среди этих кривых совпадающие?

2. Запишите в комплексной форме уравнения следующих линий:

- а) $y = ax$, $a \in \mathbb{R}$; б) $x^2 - y^2 = a^2$, $a \in \mathbb{R}$;
 в) $x^2 + y^2 - 2x = 1$.

3. Какие среди множеств в примерах п. 2.2 а) замкнуты; б) открыты; в) являются областями; г) односвязными областями? Каковы границы этих множеств?

4. Односвязно ли множество $K(\infty) = \{z \mid |z| > R\}$ в $\mathbb{C}$; в $\overline{\mathbb{C}}$?

5. Изобразите множество точек плоскости, для которых выполнены следующие соотношения:

- а) $1 < |2z + 4i| < 4$; б) $1 \leq |\bar{z} + 2i| \leq 3$;

с) $\arg z = \arg(z + 1 - i)$; д) $|\pi - \arg(2z^2)| < \frac{\pi}{4}$;

е) $|z - 1| \leq |z|$; ф) $\left| \frac{z - 2i}{2z - i} \right| \geq 1$;

г) $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$ ($|a| > 1$); h) $|z|^2 < \operatorname{Re} z$;

и) $|z|^2 \geq \operatorname{Im} \bar{z}$; j) $2|z| < \operatorname{Re} z + 6$;

к) $\begin{cases} 1 < |z + 1| < 2, \\ -\frac{\pi}{2} \leq \arg(z + 1) \leq 0; \end{cases}$ л) $\begin{cases} 1 \leq |z + 2 - i| < 3, \\ |\arg(z + 2 - i)| < \frac{\pi}{4}; \end{cases}$

м) $\operatorname{Re} \frac{i}{z} > \frac{1}{2}$; н) $\operatorname{Im} \frac{i}{z} \geq 5$; о) $\operatorname{Im} \left(\frac{i}{z} - 1 \right) < 1$;

п) $\operatorname{Im} \left(\frac{i}{z} + \frac{i}{2} \right) \geq 1$; q) $\operatorname{Re} \frac{z + 1}{z - 1} \geq 0$;

р) $\operatorname{Im} \frac{z - 1}{z + 1} \leq 0$; с) $\operatorname{Re} \left(\frac{1}{z} \right) + \operatorname{Im} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) > 1$;

т) $\operatorname{Im} \left(\frac{1}{\bar{z}} \right) \geq \operatorname{Im} z$; у) $|z^2 - 1| < 1$; в) $|z^2 - i| < 1$;

ш) $2|z| < |z^2 + 1|$.

6. Какие среди множеств а) — у) предыдущей задачи являются а) областями; б) односвязными областями?

§3. Последовательности и ряды комплексных чисел

3.1. Предел числовой последовательности

Определения. Последовательность $\{z_n\}$ сходится к пределу z_0 ($z_0 \neq \infty$): $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0$, или $z_n \rightarrow z_0$ при $n \rightarrow \infty$, если $\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N \Rightarrow |z_n - z_0| < \epsilon$.

Отметим, что геометричность сходимость последовательности комплексных чисел не что иное, как сходимость последовательности точек в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^2$.

Последовательность $\{z_n\}$ является бесконечно большой, если $\forall M > 0 \exists N(M) \forall n > N \Rightarrow |z_n| > M$.

Если рассуждения происходят в $\mathbb{C}$, то в этом случае говорят также, что последовательность $\{z_n\}$ *сходится к* $z_0 = \infty$.

Замечание. Очевидно, справедливо следующее утверждение: При $n \rightarrow \infty$: $z_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow \zeta_n = \frac{1}{z_n} \rightarrow 0$.

Пусть $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

Теорема 3.1. $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = z_0, z_0 \neq \infty \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \\ \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0. \end{cases}$

▷ а) Поскольку $|x| \leq |z|, |y| \leq |z|$, то из условия $|z_n - z_0| \rightarrow 0$ следует $|x_n - x_0| \rightarrow 0$ и $|y_n - y_0| \rightarrow 0$ одновременно при $n \rightarrow \infty$.

Обратно, если для произвольного $\epsilon > 0 \forall n > N$ справедливы неравенства

$$|x_n - x_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}} \text{ и } |y_n - y_0| < \frac{\epsilon}{\sqrt{2}}, \text{ то } |z_n - z_0| < \epsilon \quad \triangleleft$$

Вследствие теоремы 3.1 все основные результаты теории пределов для действительных чисел переносятся на комплексный случай.

Отметим несколько полезных свойств сходящихся последовательностей.

Утверждение 1. Если $z_n \rightarrow z_0$, то $|z_n| \rightarrow |z_0|, n \rightarrow \infty$.

▷ Доказательство следует из неравенства

$$||z_n| - |z_0|| \leq |z_n - z_0| \quad \triangleleft$$

Утверждение 2. Пусть $z_n = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = |z_n|, \varphi_n = \arg z_n, n = 1, 2, \dots$. Тогда из условий $r_n \rightarrow r_0$ и $\varphi_n \rightarrow \varphi_0$ следует $z_n \rightarrow z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ при $n \rightarrow \infty$.

▷ Для $z_n = r_n e^{i\varphi_n} = r_n (\cos \varphi_n + i \sin \varphi_n)$ последовательности действительных и мнимых частей имеют пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \cos \varphi_n = r_0 \cos \varphi_0,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n \sin \varphi_n = r_0 \sin \varphi_0,$$

поэтому результат вытекает из теоремы 3.1 $\triangleleft$

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Примеры. Найти пределы следующих последовательностей:

a) $z_n = \frac{n - i^n}{2in + 1}$; b) $z_n = \frac{e^{in}}{i^n n^\alpha}, \alpha \geq 0$; c) $z_n = \left(1 + \frac{i}{n}\right)^n$.

▷ а) Как было отмечено выше, теоремы об арифметических действиях с пределами остаются справедливыми для комплексных чисел, поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n - i^n}{2in + 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{i^n}{n}}{2i + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2},$$

так как $\left|\frac{i^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

b) Для $\alpha > 0$ в силу п. г) утверждения 3 §1 имеем $|z_n| = \left|\frac{e^{in}}{i^n n^\alpha}\right| = \frac{1}{n^\alpha} \rightarrow 0$, когда $n \rightarrow \infty$, следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

При $\alpha = 0$ получаем расходящуюся последовательность

$$z_n = \frac{e^{in}}{i^n} = \frac{1}{i^n} \cdot (\cos n + i \sin n).$$

Действительно, если бы существовал предел этой последовательности, то $|z_{4k} - z_{4k+2}| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Но $\forall k \in \mathbb{N}$

$$|z_{4k} - z_{4k+2}| = |e^{4ki} + e^{(4k+2)i}| = |e^{(4k+1)i}| |e^{-i} + e^i| = 2 \cos 1 \neq 0.$$

с) Используем представление числа в показательной форме: $c_n = 1 + \frac{i}{n} = r_n e^{i\varphi_n}$, где $r_n = \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}$, $\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{1}{n}$.

Существуют пределы

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} (r_n)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1;$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} n \varphi_n = \lim_{n \rightarrow \infty} n \operatorname{tg} \varphi_n = 1$$

(при вычислении второго предела мы использовали эквивалентность бесконечно малых при $n \rightarrow \infty$ величин φ_n и $\operatorname{tg} \varphi_n$). Поэтому в силу утверждения 2 существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n)^n = R e^{i\alpha} = e^i = \cos 1 + i \sin 1 \quad \triangleleft$$

3.2. Ряды комплексных чисел

Определения. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$, (1)

членами которого являются комплексные числа $z_n = x_n + iy_n$, называется *сходящимся*, если сходится последовательность

$\{s_n\}$ его частичных сумм: $s_n = \sum_{k=1}^n z_k$. При этом число $s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$ является *суммой* этого ряда.

Ряд (1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$. (2)

Теорема 3.2. Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда одновременно сходятся ряды $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

▷ Доказательство следует из определения сходимости ряда и теоремы 3.1 $\triangleleft$

На комплексный случай переносятся следующие факты.

Утверждение 3 (критерий Коши сходимости ряда). Ряд (1) сходится тогда и только тогда, когда

$$\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |s_{n+p} - s_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} z_k \right| < \epsilon.$$

Утверждение 4 (необходимое условие сходимости ряда). Если ряд (1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$.

Утверждение 5. Если сходится ряд (2), то сходится и ряд (1), т.е. из абсолютной сходимости ряда следует его сходимость.

Утверждение 6. Абсолютная сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ равносильна одновременной абсолютной сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$.

Замечание (о признаках абсолютной сходимости ряда). Для исследования ряда (2) применимы известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами (признаки сравнения, Даламбера, Коши, Гаусса, интегральный признак и т.д.)

Примеры. Исследовать сходимость следующих рядов:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 + i^n}{3n^2 - 2ni}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} n^3 \left(\frac{3 + 4i}{10i} \right)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2i - n i^{2n}}{n^2 + 1}.$$

$$\triangleright a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + i^n}{3n^2 - 2ni} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5i + \frac{i^n}{n^2}}{3 - \frac{2i}{n}} = \frac{5i}{3} \neq 0,$$

поэтому ряд расходится (см. утверждение 4).

$$b) \quad \text{При } n \rightarrow \infty \quad \sqrt[n]{|z_n|} = \sqrt[n]{n^3} \sqrt[n]{\left| \frac{3 + 4i}{10i} \right|^n} =$$

$= (\sqrt[n]{n})^3 \left| \frac{3+4i}{10i} \right| = \frac{1}{2} (\sqrt[n]{n})^3 \rightarrow \frac{1}{2} < 1$, значит, данный ряд сходится абсолютно согласно признаку Коши.

c) Так как $\frac{2i - n i^{2n}}{n^2 + 1} = (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1} + i \frac{2}{n^2 + 1}$,
а ряды с вещественными членами $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 + 1}$ сходятся (первый по признаку Лейбница, второй — по признаку сравнения), то сходится и данный ряд (см. теорему 3.2) $\triangleleft$

3.3. Вопросы и задачи

1. Следует ли из сходимости последовательности $\{|z_n|\}$ сходимость последовательности $\{z_n\}$?
2. В каких случаях сходимость последовательности $\{|z_n|\}$ равносильна сходимости последовательности $\{z_n\}$?
3. Покажите, что утверждение, обратное к утверждению 2, вообще говоря не верно. При каких дополнительных условиях оно имеет место?
4. Пусть последовательность $\{z_n = x_n + i y_n\}$ бесконечно большая. Верно ли, что хотя бы одна из последовательностей $\{x_n\}$ или $\{y_n\}$ также бесконечно большая?
5. Докажите, что любая последовательность в $\overline{\mathbb{C}}$ содержит сходящуюся подпоследовательность.
6. Найдите $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n$, если он существует, для следующих последовательностей ($\arg z \in (-\pi; \pi]$):

- a) $z_n = n \sin \frac{2}{n} + i \frac{3n+1}{n}$; b) $z_n = (1-i)^n \cdot \left(\frac{1+i}{2i+1} \right)^{2n}$;
c) $z_n = \left(\frac{i}{\sqrt{2}+i} \right)^{n^2}$; d) $z_n = \arg \left(2 + \frac{i^n}{n} \right)$;
e) $z_n = \arg \left(-2 + \frac{i^n}{n} \right)$; f) $z_n = (3-4i)^n \cdot \left(\frac{1+i^n}{2in+1} \right)^n$;
g) $z_n = \left(1 + i \sin \frac{2}{n} \right)^n$; h) $z_n = n \left(1 - e^{\frac{i\pi}{n}} \right)$;
i) $z_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{1 + \cos \alpha + i \sin \alpha}{2} \right)^n$ (здесь $\alpha \in \mathbb{R}$).

7. Найдите все комплексные числа z , для которых сходится в $\mathbb{C}$ последовательность $\{z_n\}$. Вычислите пределы этих последовательностей:
a) $z_n = (2iz)^n$; b) $z_n = \frac{z^n}{1+z^n}$; c) $z_n = n^k \cdot z^n$, $k \in \mathbb{Z}$.
8. Исследуйте сходимость следующих рядов:
a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2 - 3ni^n}{3in^2 - \sqrt{5}}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{i\sqrt{n} + 2n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4i)^n}{n!}$;
d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{\frac{i\pi}{n}}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} \cdot \left(\frac{1+e^{-i\alpha}}{2i} \right)^n$, $\alpha \in (0, 2\pi)$.
9. Докажите справедливость утверждения 6.
10. Докажите, что из сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$, где $\operatorname{Re} z_n \geq 0$, следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$.
11. Докажите, что из сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ следует сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|$, если $|\arg z_n| \leq \alpha < \frac{\pi}{2}$.

§4. Функции комплексного переменного. Непрерывность

4.1. Определения и примеры

Определение. Пусть $E, F \subset \mathbb{C}$. Говорят, что на множестве E определена функция комплексного переменного (ФКП) $f: E \rightarrow F$, или $w = f(z)$, если $\forall z \in E \exists w \in F: w = f(z)$.

Замечание. ФКП – это функция, определенная на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$, значения которой, вообще говоря, также являются комплексными числами. Однако, в отличие от ситуации, принятой в вещественном математическом анализе, функции комплексного переменного могут быть как однозначными, так и многозначными. Отметим также, что допускается $z_0 = \infty \in E, w_0 = \infty \in F$.

Рассмотрение многозначных функций будет ниже оговариваться особо.

Определение. ФКП $w = f(z)$ называется *однолистной* на множестве D , если $\forall z_1, z_2 \in D, z_1 \neq z_2 \Rightarrow w_1 = f(z_1) \neq w_2 = f(z_2)$ (т.е. обратное отображение на множестве $f(D)$ является однозначным).

При этом D будем называть *множеством однолистности функции* $w = f(z)$.

Пусть на некотором множестве $E \subset \mathbb{C}$ определена однозначная функция $w = f(z)$. Обозначим $w = u + iv, z = x + iy$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$). Тогда задание ФКП $w = f(z)$ равносильно заданию пары действительных функций двух вещественных переменных, которые определены на множестве плоскости Oxy , соответствующем E (сохраним для него обозначение E).

Примеры.

a) Линейная функция $w = az + b, a, b \in \mathbb{C}$.

Линейная функция определена на $\mathbb{C}$, однозначна. При $a \neq 0$ она однолистка, так как имеет однозначную обратную функцию $z = \frac{w - b}{a}$, также определённую на всем $\mathbb{C}$.

b) Функция $w = z^2$ определена на $\mathbb{C}$ и однозначна. Это не однолистка ФКП, так как $w(-z) = w(z)$. Она имеет двужначную обратную функцию, также определённую на $\mathbb{C}: z = \sqrt{w}$ (при всех $w \neq 0$ корень имеет ровно два различных значения).

ФКП $w = z^2, z \in \mathbb{C}$, порождает пару вещественных функций $u = x^2 - y^2; v = 2xy$, определённых на всей плоскости Oxy .

c) Функция $w = \frac{\bar{z}}{z}$ определена при $z \neq 0$, не является однолистной на множестве определения, так как $w(-z) = w(z)$.

Поскольку $\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}^2}{|z|^2}$, то $u = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, v = -\frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

4.2. Некоторые элементарные функции комплексного переменного

Степенная и обратная к ней функция.

Степенная (с натуральным показателем) функция имеет вид

$$w = z^n, \text{ где } n \in \mathbb{N}.$$

Очевидно, $w(0) = 0$. Для $w \neq 0$ из $z = |z|e^{i\varphi}$ вытекает $w = |z|^n e^{in\varphi}$. Отсюда следует (покажите!), что областью однолистности степенной функции является внутренность всякого угла $\alpha < \varphi < \beta, \beta - \alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, в частности

$$D = \left\{ z: 0 < \varphi < \frac{2\pi}{n} \right\}.$$

Обратная к степенной функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \text{ где } n \in \mathbf{N}, n > 1,$$

определена в $\mathbf{C}$ и является n -значной (см. п. 1.7).

Показательная функция.

По определению:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y), \quad z = x + iy. \quad (1)$$

Если $w = u + iv$, то для $w = e^z$ имеем $u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$.

Из (1) следует периодичность функции e^z с периодом $T = 2\pi i k$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$. Заметим также, что $|e^z| = \sqrt{e^{2x} (\cos^2 y + \sin^2 y)} = e^x > 0$, поэтому $e^z \neq 0$.

Логарифмическая функция.

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ в комплексной плоскости определяется как функция, обратная к показательной (1). Поскольку функция e^z периодична, она неоднозначна в $\mathbf{C}$, поэтому логарифмическая функция — неоднозначная.

Если принять обозначения $w = u + iv$, $z = |z| e^{i \arg z}$, то для $z \neq 0$ имеем

$$e^w = z \Leftrightarrow e^u \cdot e^{iv} = |z| \cdot e^{i \arg z} \Leftrightarrow \begin{cases} e^u = |z|, \\ v = \arg z + 2\pi k, \end{cases}$$

откуда

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbf{Z}. \quad (2)$$

Ограничившись рассмотрением главного значения аргумента, получим однозначно вычисляемое *главное* значение логарифма:

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z. \quad (3)$$

(Обратите внимание, что в формуле (3) используется то же обозначение $\ln$, что и для вещественного логарифма положительного действительного числа $|z|$, $z \neq 0$).

Тригонометрические функции.

По определению:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}.$$

Справедливо основное тригонометрическое тождество:

$$\cos^2 z + \sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 = 1.$$

Так же непосредственным вычислением устанавливается формула приведения:

$$\begin{aligned} \cos \left(\frac{\pi}{2} - z \right) &= \frac{1}{2} \left(e^{i(\frac{\pi}{2}-z)} + e^{-i(\frac{\pi}{2}-z)} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} e^{-iz} + e^{-i\frac{\pi}{2}} e^{iz} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (i e^{-iz} - i e^{iz}) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) = \sin z. \end{aligned}$$

Легко проверить, что имеет место равенство

$$\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2.$$

Из этих формул следуют все остальные формулы тригонометрии, известные из курса элементарной математики.

Обратные тригонометрические функции.

Введем значения $w = \operatorname{Arccos} z$ как множество решений относительно w уравнения

$$z = \cos w \Leftrightarrow e^{iw} + e^{-iw} = 2z.$$

Решив это уравнение (см. ниже примеры из п. 4), получим равенство

$$\operatorname{Arccos} z = -i \operatorname{Ln}(z \pm \sqrt{z^2 - 1}), \quad (4)$$

определяющее бесконечно много чисел (здесь можно использовать какое-то одно из пары значений $\sqrt{z^2 - 1}$).

Аналогично

$$\operatorname{Arcsin} z = -i \operatorname{Ln}(iz \pm \sqrt{1 - z^2}); \quad (5)$$

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{i}{2} \operatorname{Ln} \frac{1 - iz}{1 + iz}, \quad z \neq \pm i. \quad (6)$$

Гиперболические функции комплексной переменной определяются аналогично вещественному случаю:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \operatorname{th} z = \frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}, \quad \operatorname{cth} z = \frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Отметим полезные равенства (они проверяются непосредственно):

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1 \quad (\text{основное тождество})$$

$$\cos(iz) = \operatorname{ch} z, \quad \sin(iz) = i \operatorname{sh} z, \quad (7)$$

$$\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2, \quad (8)$$

$$\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2. \quad (9)$$

Из равенств (7) очевидна неограниченность в $\mathbb{C}$ тригонометрических функций $\sin z$ и $\cos z$.

Примеры.

1. Найти действительную и мнимую части следующих чисел:

$$a) \sin(4 - 3i); \quad b) \ln(1 + i); \quad c) \operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i).$$

$$\triangleright a) \quad c = \sin(4 - 3i) = \sin 4 \cdot \cos 3i - \cos 4 \cdot \sin 3i = \\ = \sin 4 \cdot \operatorname{ch} 3 - i \cos 4 \cdot \operatorname{sh} 3.$$

$$\text{Итак, } \operatorname{Re} c = \sin 4 \cdot \operatorname{ch} 3, \quad \operatorname{Im} c = -\cos 4 \cdot \operatorname{sh} 3.$$

$$b) \quad c = \ln(1 + i) = \ln|1 + i| + i \arg(1 + i) = \ln\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4},$$

$$\text{значит, } \operatorname{Re} c = \frac{1}{2} \ln 2, \quad \operatorname{Im} c = \frac{\pi}{4}.$$

$$c) \quad c = \operatorname{Ln}(\sqrt{3} - i) = \ln|\sqrt{3} - i| + i \operatorname{Arg}(\sqrt{3} - i) = \\ = \ln 2 + i \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \text{откуда } \operatorname{Re} c = \ln 2, \\ \operatorname{Im} c = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k \quad \triangleleft$$

2. В каких точках комплексной плоскости функция $\operatorname{ch} z$ принимает а) действительные значения; б) чисто мнимые значения?

$\triangleright$ Так как $\operatorname{ch} z = \operatorname{ch}(x + iy) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} iy + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} iy = \operatorname{ch} x \cos y + i \operatorname{sh} x \sin y$, то

$$a) \quad \operatorname{Im}(\operatorname{ch} z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{sh} x \sin y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{sh} x = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}; \end{cases}$$

$$b) \quad \operatorname{Re}(\operatorname{ch} z) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{ch} x \cos y = 0 \Leftrightarrow \cos y = 0 \\ \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z} \quad \triangleleft$$

3. Доказать², что $\operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2) = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$, где $z_1 \cdot z_2 \neq 0$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

$\triangleright$ Пусть $c_1 = \operatorname{Ln} z_1$, $c_2 = \operatorname{Ln} z_2$, тогда, согласно определению логарифма, $z_1 = e^{c_1}$, $z_2 = e^{c_2}$. Поэтому $z_1 z_2 = e^{c_1} \cdot e^{c_2} = e^{c_1 + c_2}$, значит, $c_1 + c_2 = \operatorname{Ln}(z_1 \cdot z_2)$, что и требовалось $\triangleleft$

$$4. \text{ Решить уравнения: } a) \sin z = 0; \quad b) \cos z = i.$$

² Отметим, что правая часть равенства представляет собой сумму множеств.

▷ а) Используя определение $\sin z$, после замены $t = e^{iz}$ приходим к уравнению

$$t - \frac{1}{t} = 0 \Leftrightarrow t^2 = 1 \Leftrightarrow e^{2iz} = 1.$$

Отсюда $2iz = i2\pi k \Leftrightarrow z = \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

Итак, синус в комплексной плоскости имеет те же самые нули, что на вещественной прямой.

б) Аналогично предыдущему получаем уравнение

$$t + \frac{1}{t} = 2i \Leftrightarrow t^2 - 2it + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = i \pm \sqrt{-2} \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = (1 + \sqrt{2})i \\ t_2 = (1 - \sqrt{2})i. \end{cases}$$

Из равенства $t = e^{iz}$ имеем $iz = \operatorname{Ln} t \Leftrightarrow z = -i \operatorname{Ln} t.$ Первое из значений t дает серию решений

$$z = -i \operatorname{Ln}(1 + \sqrt{2})i = -i \left(\ln |1 + \sqrt{2}| + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right) =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(1 + \sqrt{2}),$$

а второе:

$$z = -i \operatorname{Ln}(1 - \sqrt{2})i = -i \left(\ln |1 - \sqrt{2}| + i \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) \right) =$$

$$= \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) - i \ln(\sqrt{2} - 1), \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Замечание. Можно было воспользоваться формулами (4)–(5) ◁

4.3. Предельное значение ФКП

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, определённая в некоторой проколотой окрестности $\dot{U}$ точки $z_0 = x_0 + iy_0.$

Определение (предел ФКП в точке). Комплексное число $l \neq \infty$ является пределом $f(z)$ в точке $z_0 \in \mathbf{C}$, если

$$\forall \{z_n\}, z_n \in \dot{U}, z_n \rightarrow z_0 \Rightarrow f(z_n) \rightarrow l \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Это определение предельного значения функции по Гейне.

Так же, как в вещественном случае, можно доказать его эквивалентность определению по Коши: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow$

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall z : 0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - l| < \epsilon.$$

Определение предельного значения ФКП нетрудно сформулировать и в случае, когда какое-либо из чисел z_0, l (или они оба одновременно) равно ∞ – сделайте это!

Теорема 4.1. Пусть $f(z) = u(x, y) + iv(x, y), z_0 = x_0 + iy_0, l = a + ib \quad (z_0, l \in \mathbf{C}).$ Тогда

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = l \Leftrightarrow \begin{cases} u(x, y) \rightarrow a, \\ v(x, y) \rightarrow b \end{cases} \text{ при } \begin{cases} x \rightarrow x_0, \\ y \rightarrow y_0. \end{cases}$$

▷ Доказательство вытекает из определения предела функции и теоремы 3.1 ◁

На основе этой теоремы на комплексный случай переносятся утверждения об арифметических действиях с пределами функций из вещественного анализа.

Теорема 4.2. Пусть существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A \quad \text{и} \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B.$$

Тогда существуют пределы

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) = A \pm B;$$

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \cdot g(z) = A \cdot B; \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B}, \quad B \neq 0.$$

4.4. Непрерывность функции

Определение. Функция $f(z)$ со значениями из $\mathbb{C}$ непрерывна в точке z_0 множества $E \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall z \in E : |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \epsilon.$$

Это значит, что существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$. (10)

Заметим, что вариант определения непрерывности (10) годится и для случая $\bar{\mathbb{C}}$.

Определение. Функция $f(z)$ непрерывна на множестве E , если она непрерывна в каждой точке E (обозначение: $f \in C(E)$).

Теорема 4.3. Непрерывность $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0 \in \mathbb{C}$ равносильна непрерывности двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ по совокупности переменных (x, y) в точке $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Иными словами: $\mathbb{C}$ -непрерывность $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ равносильна $\mathbb{R}^2$ -непрерывности двух функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$.

▷ Доказательство следует из определения непрерывности и теоремы 4.1 ◁

Теорема 4.3 дает возможность перенести на ФКП следующие основные свойства непрерывных функций двух действительных переменных.

Теорема 4.4. Пусть функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ непрерывны в точке z_0 . Тогда непрерывными в этой точке являются также

$$f_1(z) \pm f_2(z); \quad f_1(z) \cdot f_2(z); \quad \frac{f_1(z)}{f_2(z)}$$

(последняя – при условии $f_2(z_0) \neq 0$).

Теорема 4.5 (о непрерывности сложной функции).

Пусть функция f определена на множестве E и непрерывна в точке $z_0 \in E$, а функция g определена на множестве F , принадлежащем образу множества E , причём

$w_0 = f(z_0) \in F$ и функция g является непрерывной в точке w_0 . Тогда сложная функция $g(f(z))$ непрерывна в точке z_0 .

Определение. Функция $f(z)$ равномерно непрерывна на множестве $E \subset \mathbb{C}$, если

$$\forall \epsilon > 0 \exists \delta(\epsilon) > 0 \forall z_1, z_2 \in E : |z_1 - z_2| < \delta \Rightarrow |f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon.$$

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 4.6. Равномерная непрерывность $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ на множестве $E \subset \mathbb{C}$ равносильна равномерной непрерывности обеих функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ на этом множестве, рассматриваемом в $\mathbb{R}^2$.

Теорема 4.7 (Кантор). Функция f , непрерывная на ограниченном замкнутом множестве $E \subset \mathbb{C}$, равномерно непрерывна на множестве E .

Примеры

1. Исследовать непрерывность ФКП:

a) $f(z) = \bar{z}$.

▷ Если $z = x + iy$, $f(z) = x - iy = u + iv$, то

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y$$

– функции, непрерывные всюду в $\mathbb{R}^2$, следовательно, функция $f(z)$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ◁

b) $f(z) = \arg z$.

▷ Если считать $\arg z \in (-\pi; \pi]$, то функция $f(z) = \arg z$, определённая при $z \neq 0$, разрывна на отрицательной вещественной полуоси. В самом деле, пусть $z = x_0 < 0$. Тогда для $z_n = x_0 + \frac{i}{n}$, очевидно, $\arg z_n \rightarrow \pi$ при $n \rightarrow \infty$, в то время как для $z'_n = x_0 - \frac{i}{n}$ имеем $\arg z'_n \rightarrow -\pi$ ◁

$$c) f(z) = e^z.$$

▷ $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, поэтому

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ непрерывны всюду в $\mathbb{R}^2$, следовательно, $f(z) = e^z$ непрерывна на всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$ ◁

$$d) f(z) = \sin z.$$

▷ Функция непрерывна на $\mathbb{C}$. Действительно, согласно теореме 4.5 при любом z непрерывны функции e^{iz} и e^{-iz} , а по теореме 4.4 непрерывна $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$ ◁

$$e) f(z) = \begin{cases} \frac{\operatorname{Re} z}{\bar{z}}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

$$\triangleright \text{Преобразуем } \frac{\operatorname{Re} z}{\bar{z}} = \frac{x}{x - iy} = \frac{x(x + iy)}{x^2 + y^2}.$$

Всюду, кроме точки $(0, 0)$, функции $u(x, y) = \frac{x^2}{x^2 + y^2}$ и $v(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ непрерывны, следовательно, $f(z)$ непрерывна при $z \neq 0$.

В точке $(0, 0)$ не существует предельного значения ни $u(x, y)$, ни $v(x, y)$. В самом деле, переходя к полярным координатам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, например, для $v(x, y)$ имеем

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} v(x, y) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{r^2 \cos \varphi \sin \varphi}{r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)} = \lim_{r \rightarrow 0} \cos \varphi \sin \varphi,$$

так что результат различен при разных значениях φ . Поэтому в $z = 0$ функция $f(z)$ имеет разрыв ◁

$$f) f(z) = \begin{cases} \frac{z \operatorname{Im} z}{|z|}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

▷ Так как функции z , $\operatorname{Im} z$, $|z|$ непрерывны всюду, то по теореме 4.4 $f(z)$ непрерывна при $z \neq 0$.

Для исследования непрерывности в точке $z = 0$ найдем

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} u(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \lim_{r \rightarrow 0} r \sin \varphi \cos \varphi = 0.$$

$$\text{Аналогично } \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} v(x, y) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Отсюда следует существование $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = 0 = f(0)$.

(Заметим, что в данной задаче этот результат можно получить проще: $|f(z)| = |\operatorname{Im} z| \rightarrow 0$, если $z \rightarrow 0$).

Итак, $f(z)$ непрерывна всюду в $\mathbb{C}$ ◁

2. Исследовать следующие функции на равномерную непрерывность на множестве $E = \{z : 0 < |z| < 1\}$:

$$a) f(z) = \frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{|z|}; \quad b) f(z) = \frac{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z}{|z|^2}.$$

▷ а) Очевидно, функция $f(z) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ непрерывна во всех точках множества E , а также окружности $|z| = 1$. Поскольку существует предел

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

(см. пример 1 f)), функция $F(z) = \begin{cases} f(z), & 0 < |z| \leq 1, \\ 0, & z = 0 \end{cases}$

определена и непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\bar{E} = \{z : |z| \leq 1\}$. Тогда по теореме Кантора $F(z)$ равномерно непрерывна на $\bar{E}$, следовательно, равномерно непрерывна на E . Последнее означает равномерную непрерывность на E функции $f(z)$.

б) Как установлено в примере 1е), функция $f(z) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ не имеет предела в точке $x = 0, y = 0$. Покажем, что она не является равномерно непрерывной на E . В самом деле для значений $z_1^{(n)} = \frac{1}{n}(1+i), z_2^{(n)} = \frac{1}{n}$ при любых $n \in \mathbb{N}, n > 1$, имеем $z_1^{(n)}, z_2^{(n)} \in E, f(z_1^{(n)}) = \frac{1}{2}, f(z_2^{(n)}) = 0$. Поэтому хотя расстояние $|z_1^{(n)} - z_2^{(n)}| = \frac{1}{n}$ может быть сделано сколь угодно малым, для соответствующих значений функции имеем

$$|f(z_1^{(n)}) - f(z_2^{(n)})| = \frac{1}{2} \quad \triangleleft$$

Замечание. Обратите внимание, что первом случае данная функция может быть доопределена по непрерывности в точке $z = 0$, а во втором – нет.

4.5. Вопросы и задачи

- Для комплексного числа c найдите $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c, \operatorname{Arg} c, \arg c \in [0; 2\pi)$:
а) $c = -3ie^{-5i}$; б) $c = -2e^{4+5i}$.
- Для комплексного числа c найдите $\operatorname{Re} c, \operatorname{Im} c$:
а) $c = \cos(1 - 3i)$; б) $c = \operatorname{sh}(3 + i)$; в) $c = \ln(-2ei)$;
д) $c = \operatorname{Ln}(-2 + i2\sqrt{3})$.
- Докажите формулу $\cos(z_1 - z_2) = \cos z_1 \cos z_2 + \sin z_1 \sin z_2$.
- Докажите формулы (7)–(9).
- Докажите следующие соотношения ($z = x + iy$):
а) $\overline{\sin z} = \sin \bar{z}$; б) $|\operatorname{sh} y| \leq |\cos z| \leq \operatorname{ch} y$.

- В каких точках комплексной плоскости функции $e^z; \sin z$ принимают а) действительные значения; б) чисто мнимые значения?
- Решите уравнения:
а) $e^{iz} = \cos z$; б) $\sin 2z = i$; в) $\operatorname{ch} z = 0$;
д) $\operatorname{sh} z = \frac{i}{2}$.
- Имеют ли решения в $\mathbb{C}$ уравнения а) $\operatorname{tg} z = i$, б) $\operatorname{th} z = -1$?
- Докажите формулы (4)–(6).
- Докажите, что $\operatorname{Ln} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$, где $z_1, z_2 \in \mathbb{C}, z_1, z_2 \neq 0$.
- Верно ли равенство $\operatorname{Ln}(z^2) = 2 \operatorname{Ln} z$, где $z \in \mathbb{C}, z \neq 0$?
- Сформулируйте (в смысле Коши), что означают следующие утверждения:
а) $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$ ($z_0 \neq \infty$); б) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = w_0$ ($w_0 \neq \infty$);
в) $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.
- Вычислите следующие пределы:
а) $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin 2z}{\operatorname{sh} iz}$; б) $\lim_{z \rightarrow -\frac{i\pi}{2}} \frac{e^{2z} + 1}{e^z + i}$.
- Докажите, что если функция $f(z)$ непрерывна на множестве E , то функция $|f(z)|$ также непрерывна на этом множестве. Верно ли обратное утверждение?
- Исследуйте следующие функции на непрерывность на области их определения:

$$\begin{aligned} a) f(z) &= \operatorname{tg} z; & b) f(z) &= \ln^2 z; & c) f(z) &= e^{\bar{z}}; \\ d) f(z) &= \frac{\operatorname{ch} z}{1 + \operatorname{sh}^2 z}; \end{aligned}$$

$$e) f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|z|}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases} \quad f) f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0; \end{cases}$$

$$g) f(z) = \begin{cases} \frac{z^2}{|z|^2}, & z \neq 0, \\ 1, & z = 0. \end{cases}$$

16. Пусть функция равномерно непрерывна на множестве E . Следует ли отсюда ее ограниченность на этом множестве?

17. Исследуйте следующие функции на равномерную непрерывность на множестве $E = \{z : 0 < |z| < 1\}$:

$$a) f(z) = \frac{1}{1 + z^2}; \quad b) f(z) = \operatorname{ctg} z; \quad c) f(z) = \ln z;$$

$$d) f(z) = \frac{z^2}{|z|}; \quad e) f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}; \quad f) f(z) = e^{-\frac{1}{|z|^2}}.$$

18. Исследуйте функцию $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$ на непрерывность и равномерную непрерывность на множествах

$$E_1 = \left\{z : 0 < |z| < 1, |\arg z| > \frac{5\pi}{6}\right\}; \quad E_2 = \left\{z : 0 < |z| < 1, |\arg z| > \frac{\pi}{2}\right\}. \quad \text{Здесь } \arg z \in (-\pi, \pi].$$

19. Пусть E – ограниченное множество, а $\bar{E}$ – его замыкание. Докажите, что функцию $f(z)$ со значениями в $\mathbb{C}$, определённую и непрерывную на E , можно продолжить по непрерывности на множество $\bar{E}$ тогда и только тогда, когда эта функция равномерно непрерывна на E .

§5. Дифференцируемость ФКП. Условия Коши-Римана

5.1. Дифференцируемость ФКП

Понятия *производной* и *дифференцируемости* функции $w = f(z)$ вводятся так же, как в вещественном случае. Пусть f – однозначная ФКП, определённая в окрестности точки z . Пусть Δz – приращение значения аргумента, настолько малое, чтобы точка $z + \Delta z$ также принадлежала указанной окрестности; $\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z)$.

Определения. Если существует конечный предел

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}, \quad (1)$$

то он называется *производной*³ функции f в точке z .

Функция f *дифференцируема* в точке z (или *С-дифференцируема*), если ее приращение в этой точке $\Delta f(z)$ представимо в виде

$$\Delta f(z) = K \Delta z + o(|\Delta z|) \quad \text{при } \Delta z \rightarrow 0. \quad (2)$$

Здесь $K \in \mathbb{C}$ – величина, которая не зависит от Δz (но может зависеть от z), $|\Delta z| = \rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $o(|\Delta z|)$ – такая функция от Δz , что $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{o(|\Delta z|)}{\Delta z} = 0$.

Из определений (1) и (2) следует

Утверждение 1. Функция f дифференцируема в точке z тогда и только тогда, когда она имеет производную в этой точке. При этом $K = f'(z)$.

Определение.

Функция $f(z)$ *дифференцируема на множестве E* , если она дифференцируема в каждой точке E . (Другими словами, в любой точке E существует $f'(z)$).

³ Функция, имеющая производную в точке, называется *монотонной* в этой точке.

Правила дифференцирования.

Из определения производной и свойств пределов ФКП следует, что основные правила дифференцирования остаются верными и для ФКП. А именно, справедливо

Утверждение 2. При условии существования производных, используемых в правых частях равенств, левые их части также дифференцируемы, причём

- а) $f(z) = c \Rightarrow f'(z) = 0$;
- б) $(cf(z))' = c f'(z)$;
- в) $(f(z) \pm g(z))' = f'(z) \pm g'(z)$;
- г) $(f(z) \cdot g(z))' = f'(z) \cdot g(z) + f(z) \cdot g'(z)$;
- д) $\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z) \cdot g(z) - f(z) \cdot g'(z)}{g^2(z)}$, если $g(z) \neq 0$.

Утверждение 3 (правило дифференцирования сложной функции):

Если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z , а функция $g(\zeta)$ дифференцируема в соответствующей точке $\zeta = f(z)$, то сложная функция $w = F(z) = g(f(z))$ также дифференцируема в точке z , причём $F'(z) = g'(\zeta) \cdot f'(z) \Big|_{\zeta=f(z)}$.

Однако далее появляются существенные отличия от теории функций действительной переменной.

5.2. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости ФКП

Теорема 5.1. Для того, чтобы функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ была дифференцируема в точке $z = x + iy$, необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были R^2 -дифференцируемы в точке (x, y) и чтобы в этой точке были выполнены равенства

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x, y), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y). \end{cases} \quad (3)$$

(Равенства (3) называются условиями Коши-Римана).

▷ Необходимость. Условие дифференцируемости (2) функции f в точке z можно записать в виде

$$f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z) \Delta z + o(\rho), \quad \Delta z \rightarrow 0, \quad (4)$$

где $\rho = |\Delta z|$.

Обозначим число $f'(z) = A + iB$ и отделим в (4) действительную и мнимую части, учитывая, что $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Получим

$$\begin{aligned} u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) &= A \Delta x - B \Delta y + o_1(\rho), \\ v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) &= B \Delta x + A \Delta y + o_2(\rho), \end{aligned} \quad (5)$$

(Заметим, что условие $\rho \rightarrow 0$ равносильно одновременно выполнению условий $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$).

Равенства (5) означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x, y) и что

$$u_x(x, y) = A, \quad u_y(x, y) = -B, \quad v_x(x, y) = B, \quad v_y(x, y) = A,$$

т.е. в этой точке выполнены условия Коши-Римана.

Достаточность. Пусть функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x, y) дифференцируемы и удовлетворяют условиям Коши-Римана. Тогда, обозначив $u_x(x, y) = A; v_x(x, y) = B$, получим равенства (5). Умножив второе из этих равенств на i и сложив его с первым, приходим к (4), что равносильно условию дифференцируемости ФКП $f(z)$ в точке z <

Замечания. 1) Производная $f'(z)$ может быть записана в любой из следующих форм:

$$f'(z) = \frac{df}{dz} = u_x + iv_x = v_y - iu_y = u_x - iu_y = v_y + iv_x. \quad (6)$$

Это следует из обозначения $f'(z) = A + iB$ и теоремы 5.1.

2) Из курса математического анализа известно, что достаточным условием дифференцируемости вещественной функции двух переменных $u(x, y)$ является непрерывность ее частных производных u_x, u_y .

3) Введём обозначение для дифференцируемой на множестве E вещественной функции двух переменных: $u \in \mathcal{D}(E)$.

Запись условий Коши-Римана и производной в полярной системе координат.

Если в системе (3) перейти от переменных (x, y) к переменным (r, φ) , где $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, то получим (при $r \neq 0$)

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u}{\partial \varphi}, \end{cases} \quad f'(z) = \frac{r}{z} \cdot \left(\frac{\partial u}{\partial r} + i \frac{\partial v}{\partial r} \right). \quad (7)$$

5.3. Примеры

Исследовать дифференцируемость следующих ФКП.

a) $f(z) = \bar{z}$.

▷ $f(z) = x - iy = u + iv$, поэтому

$$u(x, y) = x, \quad v(x, y) = -y.$$

Функции $u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, однако условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке, так как

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Таким образом, $f(z)$ нигде не дифференцируема ◁

b) $f(z) = z^n$, $n \in \mathbf{N}$.

▷ Дифференцируемость $f(z) = z$ в произвольной точке z очевидным образом следует из определения, причём $f'(z) = 1$. Если $n > 1$, то дифференцируемость $f(z) = z^n$ всюду в $\mathbf{C}$ вытекает из утверждения 2. При этом

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{(z + \Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \\ &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{z^n + n z^{n-1} \Delta z + o(\Delta z) - z^n}{\Delta z} = n z^{n-1} \quad \triangleleft \end{aligned}$$

c) $f(z) = e^z$.

▷ $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$, так что

$$u(x, y) = e^x \cos y, \quad v(x, y) = e^x \sin y.$$

Функции $u(x, y), v(x, y) \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$, а условия Коши-Римана выполнены всюду в $\mathbf{R}^2$ (проверьте!) Следовательно, ФКП $f(z) = e^z$ дифференцируема на всей комплексной плоскости $\mathbf{C}$, причём

$$f'(z) = u_x + iv_x = e^x \cos y + i e^x \sin y = e^x (\cos y + i \sin y) = e^z \quad \triangleleft$$

d) $f(z) = \sin z$.

▷ Функция дифференцируема в любой точке $\mathbf{C}$. Действительно, согласно утверждениям 2, 3, поскольку всюду существуют производные функций e^z, iz , то дифференцируемы сложные функции

$$(e^{iz})' = i e^{iz}, \quad (e^{-iz})' = -i e^{-iz},$$

а также их линейная комбинация $\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$. Поэтому всюду существует

$$(\sin z)' = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \cos z \quad \triangleleft$$

e) $f(z) = \operatorname{tg} z$.

▷ Выше доказано, что функция $\sin z$ дифференцируема в любой точке **C**. Аналогично устанавливается то же свойство функции $\cos z$. Тогда согласно п. д) утверждения 2 при $\cos z \neq 0$, т.е. для $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbf{Z}$, существует производная $\operatorname{tg} z$, причём

$$(\operatorname{tg} z)' = \left(\frac{\sin z}{\cos z} \right)' = \frac{1}{\cos^2 z} \quad \triangleleft$$

f) $f(z) = z \operatorname{Im} z$.

▷ Находим $u(x, y) = xy$; $v(x, y) = y^2$.

Очевидно, $u, v \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$. Поскольку условия Коши-Римана приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} y = 2y, \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0, \\ x = 0, \end{cases}$$

данная функция дифференцируема только при $z = 0$. Воспользовавшись формулой (6), находим

$$f'(0) = u_x(0, 0) + iv_x(0, 0) = 0 \quad \triangleleft$$

g) $f(z) = (\operatorname{Im} z)^2$.

▷ Здесь $u(x, y) = y^2 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$; $v(x, y) = 0 \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^2)$.

Из условий Коши-Римана получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = 0, \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow y = 0.$$

Таким образом, данная функция дифференцируема во всех точках действительной оси: $\operatorname{Im} z = 0$. Для таких значений z по формуле (6) находим $f'(z) = 0 \quad \triangleleft$

h) $f(z) = \sqrt{|\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z|}$.

▷ В принятых выше обозначениях $u(x, y) = \sqrt{|x \cdot y|}$, $v(x, y) = 0$.

Заметим, сначала, что всюду $v_x = v_y = 0$.

Пусть $xy \neq 0$. Рассмотрим, к примеру, вторую четверть координатной плоскости: $x < 0$, $y > 0$. В любой точке этого множества $u(x, y) = \sqrt{-x} \cdot \sqrt{y}$ — дифференцируемая функция, причём $u_x = -\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{-x}} \neq 0 = v_x$. Таким образом, условия Коши-Римана здесь не выполнены. Аналогично дело обстоит внутри любой из оставшихся четвертей плоскости.

Рассмотрим далее точку, лежащую на какой-либо координатной оси, например, $(0, y)$, $y \neq 0$. Предел, вычисляемый согласно определению частной производной:

$$u_x(0, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, y) - u(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta x|} \cdot \sqrt{|y|}}{\Delta x},$$

не существует.

Остаётся рассмотреть точку $(0, 0)$. Используя определение, находим $u_x(0, 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = 0$,

$u_y(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = 0$. Итак, условия Коши-Римана выполнены в точке $z = 0$ и только в ней.

Требование дифференцируемости $u(x, y)$ в $(0, 0)$ означает, что приращение

$$\Delta u(0, 0) = u(\Delta x, \Delta y) - u(0, 0) = \sqrt{|\Delta x|} \cdot \sqrt{|\Delta y|}$$

при $\rho = \sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2} \rightarrow 0$ может быть представлено в виде

$$\Delta u(0, 0) = u_x(0, 0) \Delta x + u_y(0, 0) \Delta y + o(\rho),$$

т.е. $\sqrt{|\Delta x|} \cdot \sqrt{|\Delta y|} = o(\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}) \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\sqrt{|\Delta x|} \cdot \sqrt{|\Delta y|}}{\sqrt{|\Delta x|^2 + |\Delta y|^2}} = 0,$$

что, как легко убедиться, неверно. Следовательно, $u(x, y)$ не дифференцируема в точке $(0; 0)$.

Итак, данная функция $f(z)$ нигде не дифференцируема. (Обратите внимание: в точке $z = 0$ условия Коши-Римана выполнены, $f'(0)$ не существует по причине недифференцируемости $u(x, y)$) $\triangleleft$

5.4. Вопросы и задачи

- Получите формулы (7).
- Докажите дифференцируемость функции $f(z) = z^n$ в произвольной точке C , используя показательную форму представления аргумента z и формулы (7). Найдите $f'(z)$.
- Пусть $f = u + iv$, $z = x + iy$. Докажите следующие утверждения:

a) Из существования $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Re} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ вытекает существование производных $\frac{\partial u}{\partial x}$ и $\frac{\partial v}{\partial y}$, причём $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$.

b) Из существования $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \operatorname{Im} \frac{\Delta f(z)}{\Delta z}$ вытекает существование производных $\frac{\partial u}{\partial y}$ и $\frac{\partial v}{\partial x}$, причём $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

4. Покажите, что уравнение $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$, где f рассматривается как функция независимых переменных z и $\bar{z}$, равносильно условиям Коши-Римана функции f в точке z .

5. Исследуйте данные функции на дифференцируемость; найдите их производные там, где они существуют:

⁴ Это равенство называют условием Даламбера-Эйлера.

$$a) f(z) = e^{\bar{z}}; \quad b) f(z) = \frac{z^2}{\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z}; \quad c) f(z) = \frac{1}{z};$$

$$d) f(z) = \frac{1}{\bar{z}}; \quad e) f(z) = z \cdot |z|^2; \quad f) f(z) = (\bar{z})^2;$$

$$g) f(z) = \sin \bar{z}; \quad h) f(z) = \cos(z^2); \quad i) f(z) = \cos |z|^2;$$

$$j) f(z) = \cos x + i \sin y \quad (z = x + iy).$$

- Покажите, что для функции $f(z) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{z^4}}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0, \end{cases}$ в точке $z = 0$ выполнены условия Коши-Римана, однако она не дифференцируема в этой точке.

§6. Аналитические функции. Связь аналитичности с гармоничностью

6.1. Аналитические функции и их свойства

Определение. Функция f называется *аналитической* в области D , если она имеет в этой области непрерывную производную. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(D)$.

Замечание. 1) Важным является требование существования $f'(z)$ в области. Условие непрерывности $f'(z)$ на самом деле является излишним, оно используется для упрощения некоторых доказательств.

2) Наряду с термином "аналитическая" в литературе встречаются иные названия такой функции: регулярная, голоморфная.

Функция f называется *аналитической в точке* z_0 , если она аналитична в некоторой окрестности этой точки. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(z_0)$.

Функция f называется *аналитична в замкнутой области* $\bar{D}$, если существует такая область D_1 , что $\bar{D} \subset D_1$ и $f \in \mathcal{A}(D_1)$. Обозначение: $f \in \mathcal{A}(\bar{D})$.

Примеры.

Среди примеров п. 5.3 только функции $b), c), d), e)$ являются аналитическими (причём первые три из них аналитичны в $\mathbb{C}$, функция $\operatorname{tg} z$ аналитична всюду, где определена, т.е. при $z \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$). Функции $f), g)$ дифференцируемы на некоторых множествах, но нигде не аналитичны; функции $a), h)$ нигде не дифференцируемы, следовательно, не аналитичны.

Теорема 6.1 (свойства аналитических функций).

- a) $f \in \mathcal{A}(D) \Rightarrow f \in C(D)$;
- б) $f, g \in \mathcal{A}(D) \Rightarrow f \pm g \in \mathcal{A}(D)$;
- в) $f, g \in \mathcal{A}(D) \Rightarrow f \cdot g \in \mathcal{A}(D)$;
- г) $f, g \in \mathcal{A}(D), g \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \in \mathcal{A}(D)$.

Теорема 6.2 (аналитичность сложной функции).

Пусть функция f аналитична в области D , а функция g аналитична в области G , содержащей образ области D . Тогда сложная функция $g(f(z)) \in \mathcal{A}(D)$.

Доказательства этих теорем следуют из свойств дифференцируемых и непрерывных функций.

Теорема 6.3 (аналитичность обратной функции).

Пусть однозначная функция $w = w(z)$ аналитична в точке z_0 , причём $w'(z_0) \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $w_0 = w(z_0)$ существует однозначная обратная функция $z = z(w)$, аналитическая в точке w_0 , причём

$$z'(w_0) = \frac{1}{w'(z_0)}. \quad (1)$$

▷ Пусть $z_0 = x_0 + iy_0$. Существование обратной функции следует из однозначной разрешимости в окрестности точки (x_0, y_0) системы уравнений

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y) \end{cases}$$

относительно (x, y) . В соответствии с теоремой из курса математического анализа [5] для этого достаточно, чтобы частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были непрерывны в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) (а это так!) и был отличен от нуля функциональный определитель

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2)$$

Убедимся в последнем. В самом деле, с помощью условий Коши-Римана выражение в (2) преобразуется к виду

$$J(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \Big|_{(x_0, y_0)} = |w'(z_0)|^2 \neq 0.$$

В соответствии с той же теоремой анализа, обратное отображение дифференцируемо в некоторой окрестности точки

$$w_0. \text{ При этом } z'(w_0) = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta w} = \\ = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}} = \frac{1}{w'(z_0)}$$

(проверьте, что все пределы существуют!)

Производная $z'(w)$ непрерывна в некоторой окрестности w_0 , следовательно, обратная функция $z(w) \in \mathcal{A}(w_0)$ <

Замечание. Утверждение теоремы 6.3 имеет локальный характер. Как показывают следующие примеры, однозначная аналитическая в области D функция w , для которой $w'(z) \neq 0$ при любом $z \in D$, может иметь неоднозначную обратную функцию.

Примеры.

а) В области $D = \left\{ z : \frac{1}{2} < |z| < 2 \right\}$ функция $w = z^2$ аналитична, причём здесь $w' = 2z \neq 0$. Заметим, что эта функция двулистка в D , поскольку вместе с точкой $z \in D$ точка $-z \in D$ и $w(z) = w(-z)$. Поэтому на множестве $G = \left\{ w : \frac{1}{4} < |w| < 4 \right\}$, являющемся образом D , обратная к данной функции двузначна:

$$z = \sqrt{w} = \sqrt{|w|} e^{i \left(\frac{\arg w}{2} + \pi k \right)}, \quad k = 0, 1. \quad (3)$$

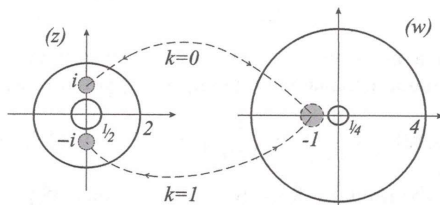


Рис. 18

В то же время согласно теореме 6.3 у любой точки $z_0 \in D$ существует такая окрестность, которая взаимно однозначно отображается на некоторую окрестность точки $w_0 = z_0^2$. При этом обратная функция $z = z(w)$ является аналитической в точке w_0 и в силу (1): $z'(w) = \frac{1}{w'(z)} = \frac{1}{2z} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$.

На рис. 18 показано, как окрестности точек $z_1 = i$ и $z_2 = -i$ отображаются на одну и ту же окрестность точки $w = -1$, но обратная функция определена однозначно – формулой (3) при $k = 0$ либо при $k = 1$ соответственно. Это две так называемые *однозначные ветви* функции $z = \sqrt{w}$.

б) Функция $w = e^z$ аналитична в $\mathbb{C}$, $w' = e^z \neq 0$. Обратная функция $z = \text{Ln } w$ определена в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и бесконеч-

нозначна. Каждая из функций $z_k = \ln |w| + i(\arg w + 2\pi k)$ (здесь $\arg w \in [0; 2\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$), т.е. так называемых *однозначных ветвей логарифма*, всюду в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, где $\mathbb{R}^+ = \{z : \text{Im } z = 0, \text{Re } z \geq 0\}$, имеет непрерывную производную

$$z'_k(w) = \frac{1}{w'(z)} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w},$$

следовательно, аналитична.

Замечание. Напомним, что любая однозначная ветвь, например $z = \ln w = \ln |w| + i \arg w$, не является непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (см. пример 1б) п. 4.4).

6.2. Связь аналитичности и гармоничности

Определения. Функция двух действительных переменных $u(x, y)$ называется *гармонической* в области D , если $u \in C^2(D)$ и $\Delta u = 0$, $(x, y) \in D$. Обозначение: $u \in \mathcal{H}(D)$.

Здесь $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа, а $\Delta u = 0$ – уравнение Лапласа.

Далее в этом параграфе предполагается, что обе функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ имеют непрерывные вторые частные производные в области определения (будем обозначать это требование так: $u, v \in C^2$). Как будет показано ниже, указанное условие не ограничивает общности рассуждений.

Две функции $u(x, y)$, $v(x, y)$ называются *сопряжёнными* (гармонически сопряжёнными), если они удовлетворяют в D условиям Коши-Римана.

Теорема 6.4. Функция $w = f(z) = u + iv \in \mathcal{A}(D)$ тогда и только тогда, когда u и v гармонические и сопряжённые функции в D .

▷ Пусть $w = f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Заметим, что согласно предположению, $u, v \in C^2(D)$.

Продифференцировав первое из уравнений Коши-Римана по x , а второе – по y и сложив их, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}.$$

Поскольку смешанные производные в правой части равенства в силу их непрерывности совпадают, имеем $\Delta u = 0$, $(x, y) \in D$. Таким образом, $u \in \mathcal{H}(D)$.

Аналогично доказывается гармоничность в D функции v .
Итак, u и v – гармонические и сопряжённые функции в D .

Обратно, так как $u, v \in \mathcal{H}(D)$, то $u, v \in C^2(D)$, поэтому $u, v \in \mathcal{D}(D)$. Поскольку эти функции удовлетворяют условиям Коши-Римана, $f(z)$ дифференцируема в каждой точке области D . Очевидно, $f'(z) = u_x + iv_x$ непрерывна в D , поэтому $f \in \mathcal{A}(D)$ $\triangleleft$

6.3. Задача восстановления аналитической функции

Утверждение. Пусть в некоторой односвязной области D задана одна из функций $u(x, y)$ или $v(x, y)$, являющихся соответственно действительной или мнимой частью соответствующей функции $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Тогда вторая из них, а следовательно и функция $f(z)$, может быть найдена единственным (с точностью до аддитивной константы) образом.

$\triangleright$ Пусть в D известна функция $u(x, y) \in \mathcal{H}$. Преобразовав с помощью условий Коши-Римана выражение

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy,$$

покажем, что оно является полным дифференциалом. В самом деле, $\frac{\partial(-u_y)}{\partial y} = \frac{\partial(u_x)}{\partial x}$, так как $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$.

Поэтому для любых двух точек $(x, y), (x_0, y_0) \in D$

$$v(x, y) - v(x_0, y_0) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} dv = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy,$$

причём значение интеграла не зависит от пути интегрирования, лишь бы он находился в односвязной области D .

Итак,

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -u_y dx + u_x dy + C, \quad (3)$$

где (x_0, y_0) – фиксированная точка D , а $C \in \mathbb{R}$ – произвольная постоянная $\triangleleft$

Замечания. 1) Неизвестную функцию $v(x, y)$ можно найти не используя (3), а решив систему уравнений Коши-Римана (см. ниже пример б)).

2) Прежде чем находить аналитическую функцию $f(z)$ по неполной информации, надо удостовериться в её существовании, т.е. проверить гармоничность данной функции $u(x, y)$ (или $v(x, y)$).

3) Аналитическую функцию $f(z) \neq 0$ можно восстановить (единственным с точностью до мультипликативной константы образом), если известна одна из функций $|f(z)|$ или $\operatorname{Arg} f(z)$.⁵

Примеры. Найти аналитическую функцию $f(z)$ (если она существует) по заданной функции

а) $\operatorname{Re} f(z) = x^2$; б) $\operatorname{Im} f(z) = x + y + xy$.

$\triangleright$ а) Для $u(x, y) = x^2$ имеем $u_{xx} + u_{yy} = 2 \neq 0$. Так как $u(x, y)$ не является гармонической, в соответствии с теоремой 6.4 аналитической функции, для которой она служила бы действительной частью, не существует $\triangleleft$

⁵ При должном выборе промежутка изменения аргумента гармоническими в некоторой области являются действительная и мнимая части регулярных однозначных ветвей функции $\operatorname{Ln} f(z) = \ln |f(z)| + i \operatorname{Arg} f(z)$, где $f(z) \neq 0$ – аналитическая.

▷ b) Легко проверить, что $v(x, y) = x + y + xy \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^2)$, следовательно, существует $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$. Найдём теперь гармонически сопряжённую функцию $u(x, y)$ из равенств Коши-Римана:

$$\begin{cases} u_x = 1 + x, \\ u_y = -1 - y. \end{cases}$$

Интегрируя первое из равенств по x , имеем

$$u(x, y) = x + \frac{x^2}{2} + C(y).$$

Функцию $C(y)$ найдём после подстановки полученного выражения во второе уравнение системы:

$$C'(y) = -1 - y, \quad \text{откуда} \quad C(y) = -y - \frac{y^2}{2} + C.$$

Поэтому $u(x, y) = x - y + \frac{x^2 - y^2}{2} + C$, так что

$$f(z) = \frac{x^2 - y^2}{2} + (x - y) + C + i(x + y + xy) = \frac{1}{2}z^2 + (1 + i)z + C,$$

где $C \in \mathbb{R}$. ◁

Замечания. 1) Решение задачи b) можно получить с помощью формулы, аналогичной (3) – см. задачу 7 из п. 6.4.

2) Для перехода к записи окончательного ответа через переменную z (вместо x, y) можно использовать равенства

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}; \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}.$$

6.4. Вопросы и задачи.

1. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $f(z) \neq \text{const}$. Следует ли отсюда аналитичность функций $f(\bar{z})$; $\bar{f}(z)$?

2. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и всюду в области D выполнено одно из условий:

- a) $\operatorname{Re} f(z) = \text{const}$; b) $\operatorname{Im} f(z) = \text{const}$;
c) $|f(z)| = \text{const}$; d) $\arg f(z) = \text{const}$.

Докажите, что тогда $f(z)$ постоянна в D .

3. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $z = x + iy$. Тогда

$$4|f'(z)|^2 = \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 |f|^2}{\partial y^2} = \Delta |f|^2.$$

4. Найдите при каких a, b, c функция $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ ($z = x + iy$), если:

- a) $f(z) = x + ay + i(bx + cy)$;
b) $f(z) = (\operatorname{ch} y + a \operatorname{sh} y) \cos x + i(\operatorname{ch} y + b \operatorname{sh} y) \sin x$.

5. Исследуйте дифференцируемость и аналитичность следующих функций ($z = x + iy$):

- a) $f(z) = \bar{z} \cdot \operatorname{Re} z$; b) $f(z) = \operatorname{Re}(z^2)$; c) $f(z) = z^2 \cdot \operatorname{Im} z$;
d) $f(z) = i(\bar{z})^2 - 2|z|^2$; e) $f(z) = (z^2 + |z|^2) \cdot \operatorname{Re} z$;
f) $f(z) = \frac{i}{\bar{z}} + z$; g) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$; h) $f(z) = 2|z|^2 - \bar{z}(\bar{z} + 4i)$;
i) $f(z) = \operatorname{tg} x + i \operatorname{tg} y$; j) $f(z) = y^2 - x^2 + 2i|xy|$;
k) $f(z) = \operatorname{sh} x \cdot \cos y + i|\operatorname{ch} x \cdot \sin y|$.

6. Пусть $u, v \in \mathcal{H}(D)$. Верно ли, что a) $u + v \in \mathcal{H}(D)$;
b) $uv \in \mathcal{H}(D)$?

7. Пусть $u(x, y)$ и $v(x, y)$ – сопряжённые гармонические функции в области D . Докажите, что функции $au(x, y) - bv(x, y)$ и $bu(x, y) + av(x, y)$, где $a, b \in \mathbb{R}$, также гармонически сопряжены в D .

8. Пусть $u(x, y)$, $v(x, y)$ – сопряжённые гармонические функции в области D . Докажите, что градиенты u и v ортогональны в каждой точке D .
9. Пусть D – односвязная область, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Покажите, что функция $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ определяется по формуле $u(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} v_y dx - v_x dy + C$, где (x, y) , $(x_0, y_0) \in D$, $C \in \mathbb{R}$.
10. Восстановите аналитическую функцию $f(z)$ (если она существует) по данным условиям:
- a) $\operatorname{Im} f(z) = 2y(x+1) - 1$; b) $\operatorname{Re} f(z) = x^3 - 3xy^2 + y$;
 c) $\operatorname{Im} f(z) = \sin x \cdot \cos y - x^2$; d) $\operatorname{Im} f(z) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$;
 e) $\operatorname{Re} f(z) = \sin x \cdot \operatorname{ch} y - y$;
 f) $\operatorname{Im} f(z) = e^x \cos y - y$, $f(0) = i$;
 g) $\operatorname{Re} f(z) = y^2 - x^2 + 3x$, $f(i) = 1 + 3i$;
 h) $\operatorname{Arg} f(z) = x^2 - y^2$; i) $|f(z)| = e^{2xy}$;
 j) $|f(z)| = (x^2 + y^2) \cdot e^{x^2}$; k) $\operatorname{Arg} f(z) = \frac{\pi}{2} + 2 \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

Глава 2

Конформные отображения. Основные элементарные функции

§7. Геометрический смысл модуля и аргумента производной.

Понятие конформного отображения

7.1. Исходные соглашения и определения.

Определения.

Углом между двумя гладкими кривыми в точке их пересечения $z_0 \neq \infty$ называется угол между их касательными в этой точке.

Углом между двумя гладкими кривыми в бесконечно удалённой точке z_0 называется угол, под которым пересекаются образы этих кривых в точке $\zeta_0 = 0$ при отображении $\zeta = \frac{1}{z}$.

Пусть однозначная функция $w = f(z)$ определена и аналитична в окрестности точки $z_0 \neq \infty$. Если $f'(z_0) \neq 0$, то согласно теореме 6.3 функция f осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой окрестности $U(z_0)$ на окрестность точки $w_0 = f(z_0)$ комплексной плоскости (w).

Рассмотрим в $U(z_0)$ гладкую кривую γ с параметризацией $z = \lambda(t)$, $t \in [\alpha; \beta]$, проходящую через точку z_0 . Тогда $z_0 = \lambda(t_0)$ при некотором $t_0 \in [\alpha; \beta]$. Возьмем на γ точку $z \neq z_0$. Пусть φ_0 – угол наклона γ в точке z_0 , т.е. угол, который касательная к кривой γ в точке z_0 составляет с положительным направлением действительной оси. Поскольку направляющий вектор этой касательной имеет вид $\lambda'(t_0)$, то $\varphi_0 = \arg \lambda'(t_0)$.

При отображении с помощью f получаем в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ плоскости (w) гладкую (почему?) кривую $\Gamma = f(\gamma)$ с уравнением параметризации $w = \Lambda(t) = f(\lambda(t))$, причём $w_0, w \in \Gamma$ (w – образ точки z , $w \neq w_0$). Обозначим $\Delta z = z - z_0$, $\Delta w = w - w_0$, Φ_0 – угол наклона касательной к кривой Γ в точке w_0 , так что $\Phi_0 = \arg \Lambda'(t_0)$ (рис. 19).

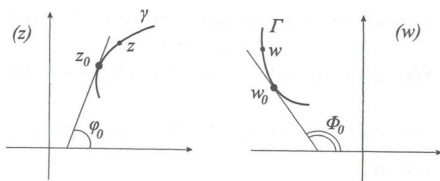


Рис. 19

Определения. Число $k_\gamma = \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ z \in \gamma}} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}$ называется

коэффициентом линейного растяжения (сжатия) кривой γ в точке z_0 .

Угол $\alpha = \Phi_0 - \varphi_0$ называется углом поворота кривой γ в точке z_0 при отображении посредством функции f .

7.2. Геометрический смысл модуля производной

Из существования производной $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}$ в соответствии с утверждением 1 п. 3.1 вытекает равенство

$$|f'(z_0)| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta w}{\Delta z} \right| = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|}. \quad (1)$$

Из определения и (1) следует, что при отображении $f(z)$ коэффициент растяжения (сжатия) кривой γ в точке z_0 равен $k_\gamma = |f'(z_0)| > 0$ и не зависит от выбора гладкой кривой, проходящей через данную точку: $k_\gamma = k$.

Число $k = |f'(z_0)|$ – коэффициент растяжения в точке z_0 при данном отображении (если $k < 1$, говорят о сжатии).

Это – свойство постоянства растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Оно означает, в частности, что окружность достаточно малого радиуса с центром в этой точке функция $f(z)$ переводит в кривую, близкую к окружности с центром в точке w_0 .

7.3. Геометрический смысл аргумента производной

По правилу дифференцирования сложной функции (см. утверждение 3 п. 5.1) имеем

$$\Lambda'(t_0) = f'(z_0) \cdot \lambda'(t_0),$$

откуда следует равенство

$$\arg \Lambda'(t_0) = \arg f'(z_0) + \arg \lambda'(t_0),$$

или, при надлежащем выборе значений аргумента,

$$\arg f'(z_0) = \Phi_0 - \varphi_0 = \alpha. \quad (2)$$

Таким образом, $\arg f'(z_0)$ – это угол поворота гладких кривых в точке z_0 при отображении f .

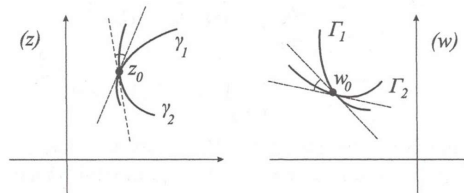


Рис. 20

Пусть γ_1 и γ_2 – две гладкие кривые, проходящие через z_0 , Γ_1 и Γ_2 – их образы при отображении f (рис. 20). Поскольку каждая из кривых при этом поворачивается на один и тот же угол $\alpha = \arg f'(z_0)$, то угол между кривыми γ_1 и γ_2 в точке z_0 равен углу между кривыми Γ_1 и Γ_2 в точке w_0 .

Это – свойство *сохранения углов* между кривыми при отображении $w = f(z)$. Отметим, что углы между кривыми сохраняются как по величине, так и по направлению отсчета.

7.4. Якобиан отображения и его геометрический смысл

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ осуществляет взаимно однозначное отображение некоторой квадратуемой области D плоскости (z) на область G плоскости (w) . Пусть $f(z) \in A(\overline{D})$, $f'(z) \neq 0$ для $z \in D$.

Сравним площади областей D и G . Используя теорему о замене переменных в двойном интеграле для преобразования $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, $(x, y) \in D$, получаем

$$S(G) = \iint_G du dv = \iint_D |J(x, y)| dx dy = \iint_D |f'(z)|^2 dx dy, \quad (3)$$

так как якобиан отображения

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} =$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 = |f'(z)|^2 \neq 0.$$

Таким образом, якобиан $J = |f'(z)|^2$ имеет смысл коэффициента пересчета площадей при отображении областей (в то время как $|f'(z)|$ – это коэффициент линейного растяжения).

7.5. Понятие конформного отображения. Основные принципы конформных отображений

Определения. Непрерывное отображение $w = f(z)$ называется *конформным в точке z_0* , если оно сохраняет углы (по

величине и направлению) между гладкими кривыми, проходящими через эту точку.

Отображение $w = f(z)$ *конформно в области D* , если оно взаимно однозначно и конформно в каждой точке D .

Из результата п. 7.3 следует

Утверждение 1. Пусть однозначная функция $f(z) \in A(z_0)$ и $f'(z) \neq 0$. Тогда отображение $w = f(z)$ конформно в точке z_0 .

Если в некоторой области D определена однозначная функция, для которой выполнены условия $f \in A(D)$ и $f'(z) \neq 0$ всюду в D , то, как показывают примеры а) и б) п. 6.1, обратное отображение не обязано быть однозначным. Следовательно, указанные условия не обеспечивают конформности в области. Справедливо

Утверждение 2. Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична и однолистка в области D и $f'(z) \neq 0$, $z \in D$. Тогда отображение $w = f(z)$ конформно в D .⁶

Основные принципы конформных отображений

Анонсируем некоторые результаты теории конформных отображений. Фундаментальным фактом этой теории является

Теорема Римана. Пусть D – односвязная область в $\overline{\mathbb{C}}$, причем её граница содержит более чем одну точку. Тогда существует конформное отображение f области D на внутренность единичного круга.

Если же дополнительно известно, что

$$f(z_0) = 0, \quad \arg f'(z_0) = \alpha_0 \quad (z_0 \in D, 0 \leq \alpha_0 < 2\pi),$$

то такое отображение единственно.

⁶ Можно показать, что условие $f'(z) \neq 0$ здесь излишне (см. §29).

Заметим, что условия относительно границы D и односвязности области существенны: так, вся плоскость $\mathbb{C}$ либо плоскость с выколотой точкой не могут быть конформно отображены на внутренность единичного круга; кольцо нельзя конформно отобразить на круг.

Конформные отображения обладают также следующими важными свойствами (доказательства следующих ниже утверждений см. в §29).

Принцип сохранения области. Пусть отличная от постоянной функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Тогда если D — область, то ее образ $G = f(D)$ также является областью.

Принцип соответствия границ. Пусть D и G — ограниченные области комплексных плоскостей (z) и (w) соответственно; их границы ∂D и ∂G — замкнутые жордановы кусочно-гладкие кривые. Пусть функция $w = f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\bar{D})$ и взаимно однозначно с сохранением ориентации отображает ∂D на ∂G . Тогда функция $f(z)$ конформно отображает D на G .

Последнее утверждение позволяет при построении конформного отображения одной заданной области на другую контролировать лишь соответствующее отображение границ этих областей.

7.6. Примеры

1) Найти, какая часть комплексной плоскости растягивается, а какая сжимается при отображении $w = z^3$.

▷ Найдем производную $w' = 3z^2$. Условие

$$k = 3|z|^2 > 1 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{\sqrt{3}}$$

определяет множество — внешность круга радиуса $\frac{1}{\sqrt{3}}$, где происходит растяжение. Внутренность указанного круга (без центра) сжимается при данном отображении ◁

2) Найти угол, на который поворачиваются кривые, проходящие через точку $z_0 = i$, при отображении $w = \frac{z-1}{z+i}$.

▷ Вычислим производную и ее значение в заданной точке:

$$w' = \left(\frac{z-1}{z+i} \right)' = \frac{i+1}{(z+i)^2}; \quad w'(i) = \frac{i+1}{(2i)^2} = -\frac{1+i}{4}.$$

Угол α поворота кривых, проходящих через точку z_0 , равен

$$\alpha = \arg w'(i) = \arg \left(-\frac{1+i}{4} \right) = \frac{5\pi}{4} \quad \triangleleft$$

3) Свойства линейной функции $l(z) = az + b$, где $a \neq 0$, $b \in \mathbb{C}$, и осуществляемого ею отображения.

▷ Функция $w = l(z)$ определена на всей комплексной плоскости и однолистка. Последнее вытекает из того, что

$$a(z_1 - z_2) = 0 \Leftrightarrow z_1 = z_2, \quad \text{если } a \neq 0.$$

Линейная функция всюду имеет производную $w'(z) = a \neq 0$, так что $l(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$.

В соответствии с утверждением 2 линейная функция осуществляет конформное отображение комплексной плоскости на себя. При этом во всех точках происходит растяжение (сжатие) с коэффициентом $k = |a|$, а любая гладкая кривая, проходящая через произвольно выбранную и зафиксированную точку совершает поворот на один и тот же угол $\alpha = \arg a$. В частности, образом луча, выходящего из начала координат плоскости (z) под углом φ , является луч с вершиной в точке $w = b$, составляющий угол $\varphi + \alpha$ с положительным направлением оси абсцисс плоскости (w) ◁

4) Функция $w = z^2$, где $z \in D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

▷ Эта функция аналитична и однолистка в D , поскольку равенство $z_1^2 = z_2^2$ при $z_1 \neq z_2$ равносильно $z_2 = -z_1$, а

точки вида z и $(-z)$ не могут одновременно находиться в одной полуплоскости.

Всюду внутри области D имеем $w' = 2z \neq 0$, поэтому отображение конформно в D .

Отметим, что конформность нарушается в точке $z_0 = 0$, где $w'(0) = 0$. В самом деле, пара лучей $\gamma_1 = \{z : z = r e^{i\alpha_1}, r > 0\}$ и $\gamma_2 = \{z : z = r e^{i\alpha_2}, r > 0\}$, где $\alpha_1, \alpha_2 \in (0; \pi)$ – некоторые фиксированные числа, преобразуется в два луча $\Gamma_1 = \{w : w = r^2 e^{2i\alpha_1}\}$ и $\Gamma_2 = \{w : w = r^2 e^{2i\alpha_2}\}$. Таким образом, исходный угол между лучами увеличился вдвое $\triangleleft$

5) Найти площадь образа единичного квадрата $D = \{0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1, 0 \leq \operatorname{Im} z \leq 1\}$ при преобразовании $f(z) = e^z$.

$\triangleright$ Поскольку $f'(z) = e^z \neq 0$, $|e^z| = e^x$, то по формуле (3) имеем

$$\begin{aligned} S &= \iint_D |f'(z)|^2 dx dy = \iint_D e^{2x} dx dy = \\ &= \int_0^1 e^{2x} dx \int_0^1 dy = \frac{1}{2} (e^2 - 1) \quad \triangleleft \end{aligned}$$

6) Найти образ кривой $x^2 + y^2 - 2y = 0$ при отображении
а) $w = 2iz + 1$; б) $w = \frac{z-1}{z+1}$.

$\triangleright$ а) 1-е решение. Пусть $w = u + iv$, тогда

$$u + iv = 2i(x + iy) + 1, \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} u = -2y + 1, \\ v = 2x. \end{cases}$$

Поэтому данное уравнение, переписанное в форме

$$x^2 + (y-1)^2 = 1, \quad (4)$$

приобретает вид

$$\left(\frac{v}{2}\right)^2 + \left(\frac{1-u}{2} - 1\right)^2 = 1 \Leftrightarrow (u+1)^2 + v^2 = 4.$$

2-е решение. Уравнение (4) задаёт окружность $|z-i| = 1$. Подставляя в последнее равенство $z = \frac{w-1}{2i}$, получаем

$$\left| \frac{w-1}{2i} - i \right| = 1 \Leftrightarrow |w+1| = 2.$$

б) Имея в виду, что $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$, $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$, $x^2 + y^2 = z\bar{z}$, уравнение данной окружности перепишем в виде $z\bar{z} + i(z - \bar{z}) = 0$.

Из уравнения, задающего отображение $w(z)$, выразим $z = \frac{w+1}{1-w}$. Тогда $\bar{z} = \frac{\bar{w}+1}{1-\bar{w}}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{w+1}{1-w} \cdot \frac{\bar{w}+1}{1-\bar{w}} + i \left(\frac{w+1}{1-w} - \frac{\bar{w}+1}{1-\bar{w}} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow w\bar{w} + (w + \bar{w}) + 2i(w - \bar{w}) + 1 &= 0, \end{aligned}$$

т.е.

$$u^2 + v^2 + 2u - 4v + 1 = 0 \Leftrightarrow (u+1)^2 + (v-2)^2 = 4 \quad \triangleleft$$

7.7. Вопросы и задачи

1. Найдите множество всех точек z , в которых происходит растяжение при отображении $f(z)$, если

$$а) f(z) = 2z + iz^2; \quad б) f(z) = \frac{1+iz}{1-iz}.$$

2. Для отображения $f(z)$ найдите множество всех точек z с заданным коэффициентом растяжения k ; с заданным углом α поворота гладких кривых, если

- $f(z) = iz^2$; $k = 2$, $\alpha = 0$;
- $f(z) = -8z^3$; $k > 6$, $\alpha = \pi$;
- $f(z) = iz^3$; $1 \leq k < 9$, $\alpha = -\frac{\pi}{2}$;
- $f(z) = \frac{1}{z}$; $k = 4$, $0 < \alpha < \pi$.

3. Найдите линейное отображение $w = az + b$, которое оставляет точку z_0 неподвижной, а точку z_1 переводит в w_1 , если

a) $z_0 = -1 + i, \quad z_1 = 2 + i, \quad w_1 = -4 + 3i;$

b) $z_0 = -i, \quad z_1 = 1 - 2i, \quad w_1 = 2 - 3i.$

4. Найдите площадь образа области D при преобразовании $f(z) = z^2$, если a) $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\};$

b) $D = \{0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}.$

5. Укажите максимальные множества однолиственности функций:

a) $f(z) = z^4;$ b) $f(z) = e^z;$ c) $f(z) = \sin z;$

d) $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$

6. Пусть $D = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$. Является ли отображение $f(z) = z^3$

a) конформным в каждой точке D ?

b) конформным в области D ?

7. Найдите максимальную область, где конформно отображение $w = f(z)$:

a) $f(z) = iz^2;$ b) $f(z) = e^{3z};$ c) $f(z) = \operatorname{sh} 2z.$

8. Найдите образ множества $\{|zi - 2| < 2\}$ при отображении с помощью функции $w = -5zi + 3.$

9. Найдите образ линии γ при преобразовании 1) $w = z^2;$

2) $w = \frac{1}{z},$ если

a) $\gamma: |z| = 2;$ b) $\gamma: \arg z = \frac{\pi}{4};$ c) $\gamma: \operatorname{Re} z = 1.$

§8. Дробно-линейная функция и ее свойства

8.1. Начальные сведения. Конформность отображения

Дробно-линейной называется функция

$$L(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ где } a, b, c, d \in \mathbb{C}, \Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1)$$

Будем называть число Δ определителем $L(z)$. Условие $\Delta = ad - bc \neq 0$ означает, что $L(z) \neq \text{const}.$

При $c = 0$ имеем линейную функцию, которая была изучена выше (см. пример 3) п. 7.6). Далее предполагается $c \neq 0.$

Функция $w = L(z)$ определена при $z \neq -\frac{d}{c}$, имеет однозначную обратную функцию, причем $z = \frac{\frac{d}{c} - w}{-cw + a},$ (2) а её определитель $\Delta_{-1} = \Delta \neq 0.$ Обратная функция определена при $w \neq \frac{a}{c}.$

Таким образом, $w = L(z)$ осуществляет взаимно однозначное отображение $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{a}{c} \right\}.$ Если дополнительно принять условия

$$w \left(-\frac{d}{c} \right) = \lim_{z \rightarrow -\frac{d}{c}} L(z) = \infty, \quad w(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} L(z) = \frac{a}{c},$$

получим взаимно однозначное и непрерывное отображение расширенной комплексной плоскости на себя $L: \overline{\mathbb{C}} \leftrightarrow \overline{\mathbb{C}}.$

Теорема 8.1. Дробно-линейная функция аналитична на множестве $\mathbb{C} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$ и конформно отображает расширенную комплексную плоскость $\overline{\mathbb{C}}$ на себя.

▷ При $z \neq -\frac{d}{c}$ существует непрерывная производная

$w'(z) = \frac{ad-bc}{(cz+d)^2}$, поэтому $L \in \mathcal{A}\left(\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}\right)$.

Функция $w = L(z)$ однолистка и $w'(z) = \frac{\Delta}{(cz+d)^2} \neq 0$, следовательно, в силу утверждения 2 п. 7.5 она задает конформное отображение множества $\mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\}$.

Покажем конформность отображения L в точке $z_0 = -\frac{d}{c}$, для которой $w_0 = L(z_0) = \infty$. В самом деле, пусть две гладкие кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в точке z_0 под некоторым углом α . Обозначим их образы, пересекающиеся в точке w_0 , черз Γ_k ($k = 1, 2$). Сделаем преобразование $\zeta = \frac{1}{w}$, при этом $\zeta_0 = \zeta(w_0) = 0$, а кривые Γ_k перейдут в некоторые кривые C_k . Так как

$$\zeta(z) = \frac{cz+d}{az+b}, \quad \zeta'(z) = \frac{bc-ad}{(az+b)^2} = -\frac{\Delta}{(az+b)^2} \neq 0,$$

дробно-линейное отображение $\zeta(z)$ конформно в $z_0 = -\frac{d}{c}$, следовательно, кривые C_k — образы кривых γ_k — пересекаются в точке $\zeta_0 = 0$ под углом α . Согласно определению (см. п. 7.1), это и есть угол, под которым кривые Γ_k пересекаются в точке $w_0 = \infty$, так что отображение L конформно в точке $z_0 = -\frac{d}{c}$.

Аналогично доказывается сохранение углов между кривыми, пересекающимися в точке $w_0 = \frac{a}{c}$ при отображении L^{-1} вида (2), для которого $L^{-1}(w_0) = \infty$. А это означает конформность отображения L в точке $z_0 = \infty$. $\triangleleft$

8.2. Групповое свойство

Теорема 8.2. Множество дробно-линейных функций $\mathcal{L} = \{L\}$ образует группу относительно операции суперпозиции.

$\triangleright$ Во-первых, заметим, что единичное (тождественное) отображение $I(z) = z \in \mathcal{L}$ и, как показано выше (п. 8.1), для любого преобразования L обратное к нему L^{-1} существует и также является дробно-линейным (2).

Во-вторых, непосредственными вычислениями проверяется, что для $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ функция $L = L_1 \circ L_2$ имеет вид

$$L(z) = \frac{Az+B}{Cz+D}, \quad \text{где} \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

При этом определитель преобразования L равен произведению определителей исходных дробно-линейных преобразований (как определитель произведения матриц), так что

$$\Delta = AD - BC = \Delta_1 \cdot \Delta_2 \neq 0$$

Таким образом, $L \in \mathcal{L}$. $\triangleleft$

Замечание. Группа дробно-линейных преобразований $\mathcal{L}$ некоммутативна, т.е., вообще говоря, $L_1 \circ L_2 \neq L_2 \circ L_1$.

(Рассмотрите пример: $L_1 = \frac{1}{z}$, $L_2 = z + 1$).

8.3. Инвариантность двойного отношения

Теорема 8.3. Пусть (z_1, z_2, z_3) и (w_1, w_2, w_3) — две тройки чисел, в каждой из которых нет совпадающих. Тогда существует единственное дробно-линейное преобразование $w = L(z)$, для которого $w_k = L(z_k)$, $k = 1, 2, 3$. Оно задается равенством

$$\frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2}. \quad (3)$$

$\triangleright$ Рассмотрим две дробно-линейные функции

$$L_1(z) = \frac{z-z_1}{z-z_2} : \frac{z_3-z_1}{z_3-z_2} \quad \text{и} \quad L_2(w) = \frac{w-w_1}{w-w_2} : \frac{w_3-w_1}{w_3-w_2},$$

а также равенство (3), т.е. $L_1(z) = L_2(w)$. Из него следует $w = L_2^{-1}(L_1(z))$, где отображение $L = L_2^{-1} \circ L_1$ — дробно-линейное в силу теоремы 8.2.

При этом $L(z_k) = w_k$, $k = 1, 2, 3$, поскольку L_1 переводит тройку точек (z_1, z_2, z_3) в тройку $(0, \infty, 1)$ соответственно и точно в ту же тройку $(0, \infty, 1)$ переходят точки (w_1, w_2, w_3) при отображении $L_2(w)$.

Покажем единственность такого преобразования. Пусть F – какое-то дробно-линейное отображение, переводящее тройку (z_1, z_2, z_3) в (w_1, w_2, w_3) . Тогда $L^{-1} \circ F \in \mathcal{L}$, т.е. при некоторых a, b, c, d

$$L^{-1}(F(z)) = \frac{az + b}{cz + d}$$

и, согласно предположению, $L^{-1}(F(z_k)) = z_k$, так что

$$\frac{az_k + b}{cz_k + d} = z_k, \quad \text{для } k = 1, 2, 3.$$

Тогда

$$cz_k^2 + (d - a)z_k - b = 0,$$

стало быть квадратное уравнение имеет три различных корня. Отсюда $c = b = 0$, $a = d$, следовательно,

$$L^{-1}(F(z)) = z \Leftrightarrow F(z) = L(z) \quad \forall z \quad \triangleleft$$

Определение. Пусть z, z_1, z_2, z_3 – четыре различных числа. Двойным, или ангармоническим, отношением называется выражение

$$\frac{z - z_1}{z - z_2} : \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2}.$$

Равенство (3) означает, что двойное отношение сохраняется (т.е. инвариантно) при дробно-линейном преобразовании.

Замечание. Равенство (3) можно использовать для построения дробно-линейной функции по трём различным точкам из $\mathbb{C}$, заданным вместе с их образами. В случае, когда какая-то из точек z_k и/или w_j является бесконечно удалённой, соответствующие разности в (3) заменяются на 1.

8.4. Круговое свойство

Теорема 8.4. Дробно-линейная функция отображает множество прямых и окружностей в себя.

▷ Если $w = l(z)$ – линейная функция, то такое преобразование является результатом последовательно проведенных отображений $w_1 = az$ и $w = w_1 + b$. Первое из них совершает растяжение (сжатие) и поворот вокруг начала координат, а второе – сдвиг всей плоскости. При каждом из этих преобразований прямая переходит в прямую, а окружность – в окружность.

Покажем далее, что преобразование $w = \Lambda(z) = \frac{1}{z}$ обладает круговым свойством. Как было установлено в примере 1 п. 2.3, уравнение

$$Az\bar{z} + \bar{B}z + B\bar{z} + D = 0, \quad B\bar{B} - AD > 0, \quad (4)$$

в случае $A = 0$ задаёт прямую на комплексной плоскости, а в случае $A \neq 0$ – окружность. Подставляя в (4) $z = \frac{1}{w}$, получаем

$$Dw\bar{w} + Bw + \bar{B}\bar{w} + A = 0,$$

т.е. уравнение того же вида, что и (4). Отметим, что при отображении $w = \Lambda(z)$ окружность (или прямая) может перейти как в прямую, так и в окружность.

Для завершения доказательства осталось заметить, что при $a, c \neq 0$

$$\frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c^2 \left(z + \frac{d}{c}\right)} = a_1 + \frac{b_1}{z + c_1},$$

так что дробно-линейная функция является суперпозицией $L = l_2 \circ \Lambda \circ l_1$, где $\zeta = l_1(z) = z + c_1$, $s = \Lambda(\zeta)$, $w = l_2(s) = a_1 + b_1 s$. (Здесь $a_1 = \frac{a}{c}$, $b_1 = \frac{bc - ad}{c^2}$, $c_1 = \frac{d}{c}$).

Случай $a = 0, c \neq 0$ рассмотрите самостоятельно $\triangleleft$

8.5. Сохранение симметрии относительно прямой (окружности)

Определения. Точки z и z^* симметричны относительно прямой γ , если γ — серединный перпендикуляр к отрезку с концами в этих точках (рис. 21а).

Точки z и z^* симметричны, или сопряжены, относительно окружности γ радиуса R с центром в точке z_0 (рис. 21б), если z и z^* лежат на одном луче, исходящем из z_0 , и $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = R^2$.

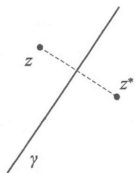


Рис. 21а

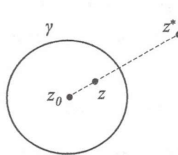


Рис. 21б

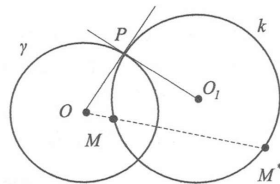


Рис. 22

Свойства симметрии.

Пусть γ — прямая либо окружность. Тогда

- 1) $(z^*)^* = z$;
- 2) $z = z^* \Leftrightarrow z \in \gamma$. В противном случае точки z и z^* лежат по разные стороны от γ .
- 3) Пусть γ — окружность $|z| = R$. Тогда пара симметричных относительно γ точек $z \neq 0$ и z^* связана равенством

$$z^* = \frac{R^2}{\bar{z}}. \quad (5)$$

Если точки $z \neq z_0$ и z^* симметричны относительно окружности $\gamma: |z - z_0| = R$, то справедливо равенство

$$z^* = z_0 + \frac{R^2}{\bar{z} - \bar{z}_0}. \quad (6)$$

▷ Пусть $z = r e^{i\varphi}$. Тогда из определения следует

$$z^* = \frac{R^2}{r} e^{i\varphi} = \frac{R^2}{r e^{-i\varphi}} = \frac{R^2}{\bar{z}}.$$

Для доказательства (6) следует сделать сдвиг на вектор z_0 ◁

4) Точка z_0 симметрична относительно окружности любого радиуса (с центром в z_0) точке $z_0^* = \infty$.

Лемма. Пусть γ — прямая либо окружность. Точки z и z^* симметричны относительно γ тогда и только тогда, когда любая окружность, проходящая через эти точки, ортогональна γ .

▷ В случае, когда γ — прямая, утверждение очевидно. Далее γ — окружность.

Необходимость. Пусть точки M и M^* , соответствующие числам z и z^* , симметричны относительно окружности γ радиуса R с центром в точке O и пусть k — окружность, проходящая через M и M^* . Проведем касательную из точки O к окружности k . Пусть $P \in k$ — точка касания. По теореме элементарной геометрии $OP^2 = OM \cdot OM^* = R^2$. Поскольку из условия симметрии следует $OM \cdot OM^* = R^2$, имеем $OP = R$, т.е. $P \in \gamma$ (рис. 22). Так как касательная к k содержит радиус γ , окружности k и γ пересекаются под прямым углом.

Достаточность. Если произвольная окружность k , проходящая через точки M и M^* , ортогональна γ , то и прямая, рассматриваемая как окружность бесконечно большого радиуса, обладает этим свойством. Тогда эта прямая проходит через центр O — точку O . Более того, точки M и M^* лежат по одну сторону от O и по разные стороны от γ (в противном случае окружность с диаметром MM^* не ортогональна γ).

Пусть P — точка пересечения γ с окружностью k . Тогда OP — касательная к k , следовательно, $OP^2 = OM \cdot OM^*$ и

поскольку $OP = R$, выполнено и второе условие из определения симметрии M и M^* $\triangleleft$

Теорема 8.5. Пусть γ – прямая либо окружность, точки z и z^* симметричны относительно γ , преобразование L дробно-линейное. Тогда точки $L(z)$ и $L(z^*)$ симметричны относительно $\Gamma = L(\gamma)$.

$\triangleright$ Для пары точек z и z^* , симметричных относительно γ , рассмотрим точки $w = L(z)$ и $w_1 = L(z^*)$. Пусть K – прямая либо окружность в плоскости (w), содержащая w и w_1 ; $k = L^{-1}(K)$ – прообраз K . По теореме 8.4 k – также окружность либо прямая, проходящая через точки z и z^* . Согласно лемме γ и k пересекаются под прямым углом. Так как по теореме 8.1 отображение L конформно, Γ и K также ортогональны. Тогда в силу произвольности выбора K из леммы следует симметрия точек w и w_1 относительно Γ $\triangleleft$

8.6. Примеры

А) Построение дробно-линейной функции по трём точкам, заданным вместе с их образами.

Для решения этой задачи можно использовать формулу (3) либо представление

$$L(z) = \lambda \frac{z+a}{z+b}. \quad (7)$$

1. Найти дробно-линейную функцию, переводящую тройку точек $(-1, i, 1+i)$ соответственно в а) $(-1, \infty, 1)$;

б) $(0, \infty, 2)$.

$\triangleright$ а) Воспользовавшись формулой (3), имеем

$$\begin{aligned} \frac{z+1}{z-i} : \frac{2+i}{1} &= \frac{w+1}{1} : \frac{2}{1}, \\ \text{откуда } w &= -1 + \frac{z+1}{z-i} \cdot \frac{2}{2+i} = -1 + \frac{2(2-i)}{5} \cdot \frac{z+1}{z-i} = \\ &= \frac{-(1+2i)z + (4+3i)}{5(z-i)}. \end{aligned}$$

б) Дробь вида (7), принимающая при $z = -1$; i значения $w = 0$; ∞ соответственно, выглядит так: $w = \lambda \frac{z+1}{z-i}$.

Коэффициент λ определяется из условия

$$w(1+i) = 2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{2}{2+i}.$$

Таким образом, искомое отображение:

$$w = \frac{2}{2+i} \cdot \frac{z+1}{z-i} = \frac{2(z+1)(2-i)}{5(z-i)} \triangleleft$$

Б) Построение образа данного множества при заданном дробно-линейном преобразовании.

При решении такого рода задач наряду с общими принципами конформных отображений (прежде всего это принцип соответствия границ, см. п. 7.5) используются также свойства дробно-линейной функции.

2. Найти образ

а) полукруга $D = \{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении с помощью функции $w = \frac{z+1}{1-z}$;

б) области, ограниченной окружностями $|z-1| = 1$ и $\left|z - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$ при отображении с помощью функции $w = \frac{1}{z}$;

в) окружности $\gamma = \{z : |z-i| = 1\}$ при отображении с помощью функции $w = \frac{z-1}{z+1}$.

$\triangleright$ а) 1-ый способ. Имея в виду принцип соответствия границ при конформном отображении, найдём образ границы области D (рис. 23). Граница ∂D состоит из части прямой и дуги окружности. В силу теоремы 8.4 функция w переводит их также в части прямых либо окружностей. Вычислим

$$w(-1) = 0, w(0) = 1, w(1) = \infty, w(i) = i.$$

Очевидно, отрезок $[-1; 1]$ переходит в положительную действительную полупрямую, а образом полуокружности является верхняя часть мнимой оси. Учитывая сохранение ориентации границы, получаем в качестве образа D первую четверть плоскости (w) (рис. 23).

2-ой способ. С самого начала ясно, что части ∂D переходят в куски прямых, поскольку точка $z = 1$, общая для отрезка и полуокружности, отображается в $w = \infty$. Выяснив, что отрезок $[-1; 1]$ переходит в положительную действительную полуось, учтём конформность отображения. Так как части границы ∂D пересекаются в точке $z = -1$ под прямым углом, тот же угол составляют их образы, пересекающиеся в точке $w = 0$.

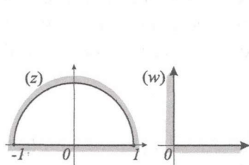


Рис. 23

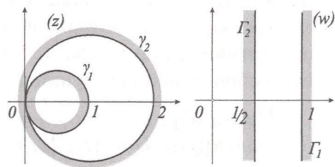


Рис. 24

б) Обе окружности переходят в прямые, так как $w(0) = \infty$. Поскольку окружности γ_1 и γ_2 (рис. 24) ортогональны вещественной прямой, которая при данном отображении переходит в себя, границы искомой области, т.е. прямые Γ_1 и Γ_2 , также перпендикулярны действительной оси в плоскости (w) . Остаётся найти образы точек пересечения: $w(1) = 1$, $w(2) = \frac{1}{2}$

и, вычислив, например, $w\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}$, учесть, что внутренняя точка области переходит во внутреннюю. Итак, результатом отображения является полоса между параллельными прямыми Γ_1 и Γ_2 .

с) Эта задача была решена выше (см. пример 6б) п. 7.6). Покажем еще один подход, основанный на использовании свойства сохранения симметрии.

Во-первых, отметим, что образом γ в плоскости (w) является некоторая окружность Γ (почему?) Далее, её центр w_0 и бесконечно удалённая точка симметричны относительно Γ (свойство 4 п. 8.5), следовательно, прообразы этих точек симметричны относительно окружности γ . Точке $w = \infty$ соответствует точка $z = -1$. Находим z^* (например, используя формулу (6)):

$$z^* = i + \frac{1}{-1+i} = \frac{i}{1-i} \quad (\text{здесь } z_0 = i, R = 1).$$

Теперь определяем центр окружности Γ :

$$w_0 = w(z^*) = w\left(\frac{i}{1-i}\right) = -1 + 2i.$$

Остаётся вычислить радиус Γ . Поскольку точка $z = 0 \in \gamma$, то $w(0) = -1 \in \Gamma$, следовательно, искомый радиус равен расстоянию $|w(0) - w_0| = |-1 - (-1 + 2i)| = 2$.

Итак, Γ имеет уравнение $|w + 1 - 2i| = 2$ <

В) Построение дробно-линейной функции, отображающей одно заданное множество на другое.

Решение такой задачи (если оно существует) также основано на общих принципах конформных отображений (см. п. 7.5) и использовании свойств дробно-линейной функции.

3. а) Найти какую-либо дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $\{|z| < 1\}$ на правую полуплоскость $\{\operatorname{Re} w > 0\}$.

▷ Для осуществления требуемого отображения достаточно выбрать какую-то тройку точек на окружности $|z| = 1$ и,

учитывая сохранение ориентации границы, указать в качестве образов тройку точек на мнимой оси плоскости (w) (см. рис. 25).

Например, преобразование $L: (1, i, -1) \rightarrow (\infty, i, 0)$ решает задачу. Остается найти явный вид $w = L(z)$. Действуя, как показано в примере 1 а), получаем $w = \frac{z+1}{1-z}$ $\triangleleft$

Отметим, что задача п. а) имеет бесконечно много решений. Более интересна следующая постановка.

б) Найти дробно-линейную функцию, переводящую верхнюю полуплоскость $\{\operatorname{Im} z > 0\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$ так, чтобы заданная точка z_0 верхней полуплоскости попадала в центр круга: $w(z_0) = 0$ (рис. 26).

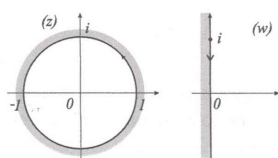


Рис. 25

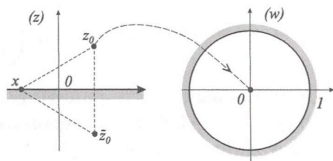


Рис. 26

$\triangleright$ Для построения этого отображения воспользуемся теоремой 8.5: симметричные относительно вещественной прямой γ точки z_0 и $\bar{z}_0$ должны перейти в симметричные относительно ее образа Γ – окружности $|w| = 1$ – точки $w = 0$ и $w = \infty$ соответственно. Поскольку последняя симметрия не учитывает значения радиуса окружности, надо потребовать, чтобы для $\tilde{z} \in \gamma$ ее образ $\tilde{w} \in \Gamma$. Тогда имеем

$$w = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad |w(\tilde{z})| = 1.$$

Поскольку $\tilde{z} = x$, $x \in \mathbf{R}$, второе из равенств принимает вид

$$|\lambda| \cdot \left| \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = 1 \Leftrightarrow |\lambda| = 1 \Leftrightarrow \lambda = e^{i\alpha} \quad \alpha \in \mathbf{R},$$

так как $|x - z_0| = |x - \bar{z}_0|$.

Итак, искомое отображение:

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbf{R}. \quad (8)$$

Оно единственно с точностью до поворота круга $\{|w| < 1\}$ относительно начала координат (α – угол этого поворота). Получить единственное решение можно указанием образа какой-либо точки с границы γ , либо заданием φ – угла поворота кривых, проходящих через точку z_0 при отображении (8): $\varphi = \arg w'(z_0)$ $\triangleleft$

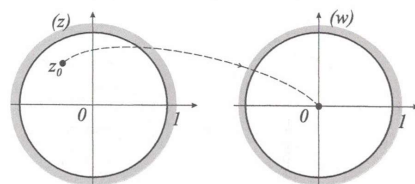


Рис. 27

с) Найти дробно-линейную функцию, которая переводит единичный круг $\{|z| < 1\}$ на единичный круг $\{|w| < 1\}$ так, чтобы заданная точка z_0 попадала в центр второго круга: $w(z_0) = 0$ (рис. 27).

$\triangleright$ В соответствии с теоремой 8.5 имеем: $w(z_0^*) = \infty$. Как показано выше (см. формулу (5)), $z_0^* = \frac{1}{\bar{z}_0}$. Поэтому

$$w = \lambda_1 \cdot \frac{z - z_0}{z - \frac{1}{\bar{z}_0}} = \lambda_1 \cdot \frac{\bar{z}_0(z - z_0)}{z\bar{z}_0 - 1} = \lambda \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad \lambda = -\lambda_1 \bar{z}_0.$$

Для определения λ используем соответствие границ: если $\tilde{z} \in \gamma$, т.е. $|\tilde{z}| = 1$, то образ этой точки $\tilde{w} \in \Gamma$, так что $|\tilde{w}| = 1$. Поскольку $\tilde{z}\bar{\tilde{z}} = |\tilde{z}|^2 = 1$, то

$$|\tilde{w}| = |\lambda| \cdot \left| \frac{\tilde{z} - z_0}{1 - \tilde{z}\bar{z}_0} \right| = |\lambda| \cdot \left| \frac{\tilde{z} - z_0}{\tilde{z}\bar{\tilde{z}} - \tilde{z}\bar{z}_0} \right| = |\lambda| \cdot \frac{|\tilde{z} - z_0|}{|\tilde{z}| |\bar{\tilde{z}} - \bar{z}_0|} =$$

$$= |\lambda| \cdot \frac{|\tilde{z} - z_0|}{|\tilde{z} - z_0|} = |\lambda| = 1, \quad \text{так как} \quad |\tilde{z} - z_0| = |\bar{\tilde{z}} - \bar{z}_0|.$$

Значит, $\lambda = e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Таким образом,

$$w = e^{i\alpha} \cdot \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}, \quad \alpha \in \mathbb{R} \quad \triangleleft \quad (9)$$

d) Отобразить с помощью дробно-линейной функции круг $\{|z| < 2\}$ с разрезом по отрезку $[-i; 2i]$ мнимой оси на круг $\{|w| < 1\}$ с разрезом по отрезку $[0; 1]$ (рис. 28).

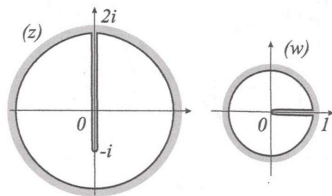


Рис. 28

▷ После преобразования сжатия $\zeta = \frac{z}{2}$ получаем единичный круг с разрезом по отрезку $\left[-\frac{i}{2}; i\right]$. Применяя преобразование (9), при котором точка $\zeta_0 = -\frac{i}{2}$ переходит в

$$w = 0, \text{ имеем } w = e^{i\alpha} \cdot \frac{\zeta + \frac{i}{2}}{1 - \frac{i}{2}\zeta} = e^{i\alpha} \cdot \frac{2\zeta + i}{2 - i\zeta}.$$

Для определения параметра $\alpha \in \mathbb{R}$ используем условие $\zeta = i \rightarrow w = 1$. Отсюда $e^{i\alpha} = -i$, следовательно,

$$w = i \frac{2\zeta + i}{i\zeta - 2} = 2i \frac{z + i}{iz - 4} = \frac{2(z + i)}{z + 4i}.$$

Так как полученное преобразование переводит мнимые числа в вещественные, причем $w(2i) = 1$, $w(-i) = 0$, это отображение искомого $\triangleleft$

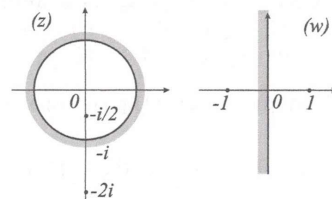


Рис. 29

e) Найти дробно-линейную функцию $w(z)$, отображающую круг $\{|z| < 1\}$ на правую полуплоскость $\{\operatorname{Re} w > 0\}$ и отвечающую условиям $w(-2i) = -1$, $w(i) = 0$.

▷ Точка $z = -\frac{i}{2}$ симметрична точке $z = -2i$ относительно единичной окружности, а точки $w = 1$ и $w = -1$ симметричны относительно прямой $\operatorname{Re} w = 0$ (рис. 29). Поэтому в силу теоремы 8.5 имеем $w\left(-\frac{i}{2}\right) = 1$. Используя формулу (3), строим дробно-линейную функцию по трем точкам и их образам:

$$\frac{z + \frac{i}{2}}{z + 2i} : \frac{3i}{2} = \frac{w - 1}{w + 1} : \frac{-1}{1} \Leftrightarrow \frac{2z + i}{z + 2i} = \frac{1 - w}{w + 1}$$

$$\Leftrightarrow w = \frac{-z + i}{3(z + i)} \quad \triangleleft$$

8.7. Вопросы и задачи

1. Докажите конформность линейного отображения в $\overline{\mathbb{C}}$.
2. Найдите линейную функцию $w = l(z)$, конформно отображающую полосу D на полосу $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$, если
 - a) $D = \{a < \operatorname{Re} z < b\}$; b) $D = \{a < \operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z < b\}$.
3. Найдите функцию $w = f(z)$, конформно отображающую кольцо $\{2 < |z| < 3\}$ на кольцо $\{4 < |w| < 6\}$ так, чтобы
 - a) $w(-2i) = 4$; b) $w(-2i) = 6$.
4. Найдите образ множества D при отображении $w = f(z)$, если
 - a) $D = \{\operatorname{Re} z < 0\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \frac{z}{z+3}$;
 - b) $D = \{|z|^2 < 1\}$, $f(z) = \frac{1}{z} + i$;
 - c) $D = \{|z-1| < 2\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $f(z) = \frac{z+1}{z-3}$;
 - d) $D = \{|9iz^2| < 4\}$, $f(z) = \frac{i}{z}$;
 - e) $D = \left\{\frac{1}{2} < \operatorname{Re} z < 1\right\}$, $f(z) = \frac{1}{z}$;
 - f) $D = \{1 < |z| < 2\}$, $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$;
 - g) $D = \left(\{\operatorname{Im} z > 0\} \setminus \{|z+1| < 1\}\right) \setminus \{|z-1| < 1\}$,
 $f(z) = \frac{z-2}{z}$;
 - h) $D = \{|z-2| < 2\} \cap \{|z-3| > 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$,
 $f(z) = \frac{z-2}{z-4}$.

5. Найдите точку, симметричную точке $z = 2 + i$ относительно окружности γ , если
 - a) $\gamma = \{|z| = 1\}$; b) $\gamma = \{|z| = 3\}$;
 - c) $\gamma = \{|z-i| = 3\}$; d) $\gamma = \{|z-2-i| = 1\}$.
6. Используя свойство сохранения симметрии, найдите координаты центра и радиус окружности, на которую функция $w = f(z)$ отображает линию γ ; приведите уравнение этой окружности, если
 - a) $\gamma = \{z : \operatorname{Re} z = 0\}$, $f(z) = \frac{1}{z+1}$;
 - b) $\gamma = \{z : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$, $f(z) = \frac{z+1}{z-1}$;
 - c) $\gamma = \{z : |z| = 2\}$, $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
7. Найдите дробно-линейную функцию $w = f(z)$, конформно отображающую область D на множество G и удовлетворяющую данным дополнительным условиям, если
 - a) $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{\operatorname{Re} w < 0\}$, $w(i) = -2$,
 $w(0) = \infty$;
 - b) $D = \{|z+1+i| < \sqrt{2}\}$, $G = \{\operatorname{Re} w > 0\}$,
 $w(-1-i) = 1$, $w(0) = i$;
 - c) $D = \{\operatorname{Im} z < 0\}$, $G = \{|w| > 2\}$, $w(i) = 0$, $w(1) = -2$;
 - d) $D = \{|z+1| > 1\}$, $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $w(1) = i$,
 $w(-2) = 0$;
 - e) $D = \{|z-1| < 2\}$, $G = \{|w| < 1\}$, $w(1) = -\frac{1}{2}$,
 $w(-1) = -1$;
 - f) $D = \{|z| < 2\}$, $G = \{|w+i| < 1\}$, $w(0) = -\frac{i}{2}$,
 $w(2i) = 0$;
 - g) $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{|w| < 1\}$, $w(i) = 0$,
 $\arg w'(i) = -\frac{\pi}{2}$;

- h) $D = \{|z| < 2\}$, $G = \{|w| < 1\}$, $w(i) = 0$, $\arg w'(i) = \frac{\pi}{4}$;
 и) $D = \{\operatorname{Im} z < 0\}$, $G = \{|w + i| < 2\}$, $w(-i) = -i$,
 $\arg w'(-i) = 0$;
 j) $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{|w| > 1\}$, $w(i) = \infty$,
 $\arg w'(-i) = \pi$;
 к) $D = \{\operatorname{Re} z < 0\}$, $G = \{|w + 1| < 1\}$, $w(-2) = -1$,
 $w'(0) = i$;
 л) $D = \{|z| < 1\} \cup \{|z - 3i| < 2\}$, G – внешность по-
 лосы $\{0 < \operatorname{Im} w < 1\}$;
 м) $D = \{|z| < 2\} \setminus \{|z - i| < 1\}$, $G = \{-1 < \operatorname{Re} w < 1\}$.

§9. Степенная функция и обратная к ней

9.1. Степенная функция с натуральным показателем

Степенная функция – это функция вида

$$w = z^n, \quad \text{где } n \in \mathbb{N}, n > 1. \quad (1)$$

Степенная функция определена при всех $z \in \mathbb{C}$; если положить $w(\infty) = \infty$, областью определения становится $\bar{\mathbb{C}}$.

Функция (1) отображает $\bar{\mathbb{C}}$ на себя, причем неоднолистно. В самом деле, для $z = r e^{i\varphi}$ ($z \neq 0, \infty$) справедливы равенства

$$z_1^n = z_2^n \Leftrightarrow r_1^n e^{in\varphi_1} = r_2^n e^{in\varphi_2} \Leftrightarrow \begin{cases} r_1 = r_2, \\ \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi k}{n}, \end{cases} \quad (2)$$

где $k = 0, 1, \dots, n-1$, так что n различных точек $z_k = r e^{i\varphi_k}$, где $\varphi_k = \varphi_0 + \frac{2\pi k}{n}$, имеют один и тот же образ.

В примере б) п. 5.3 было показано, что при любом $z \neq \infty$ существует непрерывная производная $w' = n z^{n-1}$. Поэтому

степенная функция аналитична в $\mathbb{C}$. Поскольку $w'(z) \neq 0$, если $z \neq 0$, отображение с помощью степенной функции конформно в любой точке $z \neq 0, \infty$.

Изучим поведение (1) в окрестности $z = 0$. Так как точка $z = |z| e^{i\varphi}$ соответствует $w = |w| e^{i\alpha} = |z|^n e^{in\varphi}$, имеем $|w| = |z|^n$, $\alpha = n\varphi + 2\pi k$. Поэтому полярная сетка плоскости (z) переходит в полярную сетку плоскости (w) следующим образом: луч $\arg z = \varphi$ отображается на луч, выходящий из точки $w = 0$ под углом $n\varphi$, а окружность $|z| = r$ переходит в окружность $|w| = r^n$, которая пробегается n раз. Таким образом, конформность в точке $z = 0$ нарушается.

Отображение (1) не является конформным также и в точке $z = \infty$ (почему?)

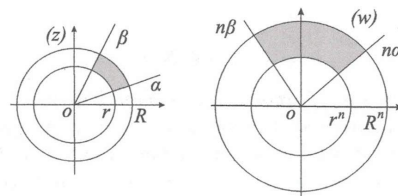


Рис. 30

Выберем для главных значений аргумента промежутки $[0; 2\pi)$. Из вышесказанного следует, что угол $\alpha < \arg z < \beta$ с вершиной в начале координат отображается на угол $n\alpha < \psi < n\beta$, $\psi \in \operatorname{Arg} w$ (рис. 30). Если раствор угла не превышает $\frac{2\pi}{n}$, из (2) следует, что его внутренность является областью однолиственности степенной функции. Максимальной областью однолиственности является внутренность угла $\varphi_0 < \arg z < \varphi_0 + \frac{2\pi}{n}$. В силу утверждения 2 п. 7.5 эта область преобразуется с помощью (1) конформно. Пусть для простоты

$\varphi_0 = 0$, тогда область $D_1 = \left\{ z : 0 < \arg z < \frac{2\pi}{n} \right\}$ степенная функция конформно отображает на плоскость с разрезом по вещественной полупрямой $\mathbf{R}^+$. Тот же образ $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ имеет любая из областей $D_k = \left\{ z : \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg z < \frac{2\pi k}{n} \right\}$, $k = 2, \dots, n$ (рис. 31). Итак, справедливо

Утверждение 1. Степенная функция $w = z^n$ аналитична в $\mathbf{C}$ и конформно отображает внутренность угла $\alpha < \arg z < \beta$, где $\beta - \alpha \leq \frac{2\pi}{n}$, на внутренность угла $n\alpha < \psi < n\beta$. В частности, любое из множеств D_k конформно отображается на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$.

9.2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$

Функция

$$w = \sqrt[n]{z}, \quad n \in \mathbf{N}, \quad n > 1, \quad (3)$$

определяется как обратная к степенной функции $z = w^n$.

Из результатов п. 9.1 вытекает, что функция (3) определена в расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$, причём $w(0) = 0$, $w(\infty) = \infty$, а во всех остальных эта функция имеет по n значений

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z}{n}} = \sqrt[n]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (4)$$

Как следует из утверждения 1, плоскость $\mathbf{C}$ можно разбить на n множеств $\tilde{D}_k = \left\{ w : \varphi_0 + \frac{2\pi(k-1)}{n} < \arg w \leq \varphi_0 + \frac{2\pi k}{n} \right\}$, $k = 1, \dots, n$, внутренность каждого из которых D_k отображается степенной функцией $z = w^n$ на множество $G_k = G$, представляющее собой плоскость (z) с разрезом по лучу $\arg z = n\varphi_0$. Поэтому обратная n -значная функция (4) отображает G на совокупность множеств D_k .

На рис. 31 изображена ситуация, соответствующая $\varphi_0 = 0$, здесь $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$. При этом границами D_k являются лучи γ_{k-1} и γ_k ($\gamma_n = \gamma_0$), которые отображаются соответственно на "верхний берег" разреза Γ^+ и его "нижний берег" Γ^- .

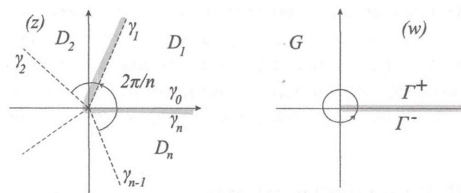


Рис. 31

В то же время, поскольку степенная функция на D_k однолистка, соответствие между D_k и $G_k = G$ взаимно однозначное, т.е. на множестве G определена однозначная функция, обратная степенной. Она задается одним из значений в (4): $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$.

По теореме 6.3 в любой точке области G эта функция имеет производную

$$(\sqrt[n]{z})'_k = \frac{1}{(w^n)'} = \frac{1}{n w^{n-1}} = \frac{1}{n (\sqrt[n]{z})_k^{n-1}} \neq 0.$$

Следовательно, функция $w_k = (\sqrt[n]{z})_k$ аналитична в G и осуществляет конформное отображение этой области на D_k .

Определение. Однозначная аналитическая в некоторой области G функция $f(z)$ называется *однозначной регулярной ветвью* многозначной функции $F(z)$, определённой в этой же области, если значение $f(z)$ в каждой точке G совпадает с одним из значений $F(z)$ в этой точке.

В нашем случае в области $G = \mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ можно выделить однозначную регулярную ветвь w_k функции (3), назвав, ка-

кое из множеств D_k соответствует G . Для этого достаточно зафиксировать значение k либо указать образ какой-нибудь точки $z \in G$ (см. ниже пример 1).

Итак, получено

Утверждение 2. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ в каждой точке $\bar{C}$, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, имеет ровно n значений. На множестве $G = C \setminus R^+$ она допускает выделение n однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в G и конформно отображает эту область на внутренность некоторого угла D_k .

9.3. Риманова поверхность

Мнозначную функцию $w = \sqrt[n]{z}$ можно определить на некотором множестве более сложного устройства так, чтобы она стала однозначной. Для этого рассмотрим вместо G n идентичных ему множеств G_k ("листов"), воспринимаемых как образы соответствующих областей D_k при отображении $z = w^n$. Пусть Γ_k^+ и Γ_k^- – верхний и нижний берега разреза по R^+ соответственно. Соединим эти листы в одну поверхность следующим образом: нижний берег G_1 "склеим" с верхним берегом G_2 , нижний берег G_2 "склеим" с верхним берегом G_3 и так далее. При этом отождествляются лучи Γ_k^- и Γ_{k+1}^+ , $k = 1, \dots, n-1$. Нижний берег последнего, n -го листа "склеим" с верхним берегом первого (рис. 32).

При отображении с помощью степенной функции $z = w^n$ образом точки, которая движется, начиная с нулевого угла, против часовой стрелки по некоторой окружности радиуса r в комплексной плоскости (w) (см. рис. 31), является точка, движущаяся в том же направлении по окружности радиуса r^n , расположенной на полученной в результате описанного процесса поверхности. При этом центр окружности находится в начале координат; при движении точки внутри угла D_k её образ перемещается по k -му листу G_k , при переходе точки

w через луч γ_k её образ z непрерывно проходит через склейку Γ_k^- с Γ_{k+1}^+ (рис. 32). Соответственно обратное отображение является однозначным.

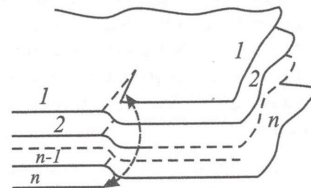


Рис. 32

Полученная конструкция называется *римановой поверхностью* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Обозначим ее через $\mathcal{R}$.

Отображение $w : \mathcal{R} \rightarrow \bar{C}$ взаимно однозначно, причём точки $z = 0$ и $z = \infty$, общие для всех листов, переходят в $w = 0$ и $w = \infty$ соответственно. Функция $w = \sqrt[n]{z}$ является непрерывной на $\mathcal{R}$. При этом каждый лист ("этаж") $\mathcal{R}$ соответствует очередной регулярной однозначной ветви функции $w = \sqrt[n]{z}$.

Спроектируем риманову поверхность $\mathcal{R}$ на расширенную комплексную плоскость $\bar{C}$ и рассмотрим в последней некоторую окружность $k : |z| = R$. Замкнутый контур на $\mathcal{R}$, все точки которого проектируются на k , таков, что обойти его можно только переходя с одного листа $\mathcal{R}$ на другой и сделав в итоге n оборотов вокруг начала координат. В этом случае $z = 0$ является так называемой *точкой ветвления* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Другими словами, некоторая точка z_0 – точка ветвления, если не существует охватывающего её замкнутого контура, принадлежащего только одному листу поверхности $\mathcal{R}$. Таким образом, в окрестности точки ветвления невозможно выделение регулярных однозначных ветвей многозначной функции.

Поскольку окружность k можно рассматривать и как контур, обходящий бесконечно удалённую точку, $z = \infty$ – также точка ветвления этой функции.

Отметим, что для любой другой точки z_0 в $\bar{\mathbb{C}}$ найдется окружность достаточно малого радиуса $|z - z_0| = r$, которой на $\mathcal{R}$ соответствуют n окружностей, не связанных друг с другом (каждая находится на своем листе римановой поверхности). Таким образом, изучаемая функция имеет ровно две точки ветвления.

Замечания. 1) Если при использовании многозначной функции $w = \sqrt[n]{z}$ не уточнено, какая из её однозначных ветвей применяется, будем рассматривать главную ветвь ($k = 0$).

2) Степень с рациональным показателем понимается следующим образом:

$$z^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{z})^m, \quad m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}.$$

9.4. Примеры

1) Допускает ли выделение регулярных однозначных ветвей функция $F(z)$ в окрестности указанной точки?

a) $F(z) = \sqrt[3]{2z - 3i}$; $z_1 = 0$; $z_2 = \frac{3}{2}i$;

b) $F(z) = \sqrt{1 - \sqrt{z}}$; $z_1 = 0$; $z_2 = 1$.

▷ a) В окрестности точки $z_1 = 0$ можно выделить три регулярные однозначные ветви данной функции.

Точка $z_2 = \frac{3}{2}i$ является точкой ветвления $F(z)$, т.е. выделение регулярных однозначных ветвей в её окрестности невозможно.

b) В окрестности точки $z_1 = 0$ невозможно выделение регулярных однозначных ветвей, так как это точка ветвления данной функции.

В окрестности точки $z_2 = 1$ существуют две регулярные ветви функции $G(z) = \sqrt{z}$, причём $g_1(1) = 1$, $g_2(1) = -1$.

Точка $z_2 = 1$ является точкой ветвления только в случае первой ветви, т.е. для функции $F(z) = \sqrt{1 - g_1(z)}$, так что лишь в случае $F(z) = \sqrt{1 - g_2(z)}$ можно выделить однозначные ветви в окрестности $z_2 = 1$ ◁

2) Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $F(z) = \sqrt[3]{z}$, задаваемую условием $f(i) = -i$ и найти значение $f(-8)$.

▷ В окрестности любой точки, кроме $z = 0$ и $z = \infty$, возможно выделение регулярных однозначных ветвей многозначной функции $F(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 2\pi k}{3}}$, где $k = 0, 1, 2$. Поскольку

$$F(i) = e^{i \left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3} \right)} = -i = e^{i \frac{3\pi}{2}},$$

получаем $k = 2$. Значит, $f(z) = \sqrt[3]{|z|} e^{i \frac{\arg z + 4\pi}{3}}$, так что

$$f(-8) = \sqrt[3]{8} e^{i \frac{\pi + 4\pi}{3}} = 2 \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 - i\sqrt{3} \quad \triangleleft$$

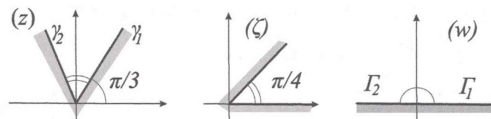


Рис. 33

3) Найти функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость

a) внутренность угла $\left\{ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{7\pi}{12} \right\}$;

b) верхний единичный полукруг $\{|z| < 1\} \cap \{\operatorname{Im} z > 0\}$;

c) плоскость с разрезом по отрезку $[-i; i]$;

d) верхнюю полуплоскость с разрезом $[0; ih]$, где $h > 0$;

e) "луночку" $\{|z| < 1\} \cap \{|z - i| < 1\}$.

▷ a) Совершим поворот данной конфигурации на угол $\frac{\pi}{3}$ по часовой стрелке: $\zeta = e^{-\frac{\pi}{3}i} \cdot z$. Поскольку величина угла составляет $\frac{\pi}{4}$, решение получается после преобразования $w = \zeta^4$, т. е. $w = e^{-\frac{4\pi}{3}i} \cdot z^4 = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} z^4$. Последовательность преобразований показана на рис. 33 ◁

▷ b) Сделаем такое дробно-линейное преобразование $\zeta = L(z)$, при котором $\zeta(-1) = 0$, $\zeta(1) = \infty$. Последние равенства гарантируют, что обе части границы исходного множества (полукружность и отрезок) перейдут в лучи с началом в точке $\zeta = 0$. Для того, чтобы один из этих лучей (например, образ отрезка) совместился с вещественной положительной полуосью плоскости ζ , потребуем $\zeta(0) = 1$. Тогда в результате преобразования $\zeta = \frac{z+1}{1-z}$ из полукруга получается первый квадрант, так как в силу конформности образы частей исходной границы ортогональны.

Теперь остаётся совершить преобразование $w = \zeta^2$, так что $w = \left(\frac{z+1}{1-z}\right)^2$ (см. рис. 34) ◁

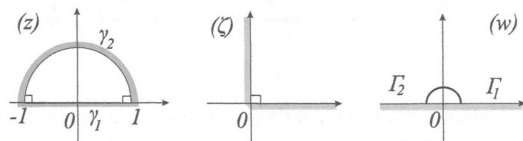


Рис. 34

▷ c) Сначала с помощью дробно-линейной функции $\zeta = L(z)$ отобразим данное множество на плоскость с разрезом по полуоси $\mathbf{R}^+$. Для этого достаточно тройку точек $(-i; 0; i)$ перевести в тройку $(0; 1; \infty)$; отсюда $\zeta = \frac{z+i}{i-z}$.

Завершается решение задачи применением преобразования $w = \sqrt{\zeta}$. Итак, окончательно $w = \sqrt{\frac{z+i}{i-z}}$. Последовательность отображений приведена на рис. 35 ◁

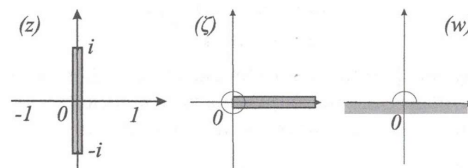


Рис. 35

▷ d) Задача решается с помощью последовательности отображений (см. рис. 36): $\zeta = z^2$, $s = \zeta + h^2$, $w = \sqrt{s}$.

Таким образом, результирующее преобразование имеет вид: $w = \sqrt{z^2 + h^2}$ ◁

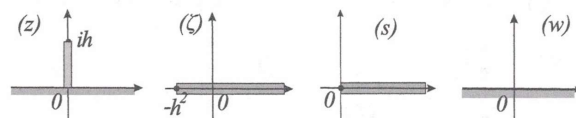


Рис. 36

▷ e) Дробно-линейная функция $\zeta = L(z)$, удовлетворяющая условию $(z_2; 0; z_1) \rightarrow (0; 1; \infty)$, переводит данную область во внутренность некоторого угла (см. рис. 37). Остаётся развернуть этот угол до полуплоскости с помощью функции $w = \zeta^p$, где показатель p требуется определить.

Точки $z_{1,2} = \frac{\pm\sqrt{3} + i}{2}$ можно найти как точки пересече-

ния окружностей $|z| = 1$ и $|z - i| = 1$. Тогда

$$\begin{aligned}\zeta &= \frac{z - z_2}{z - z_1} \cdot \frac{z_1}{z_2} = \frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)} \cdot \left(-\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})\right) = \\ &= \frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}}.\end{aligned}$$

В силу конформности отображения $\zeta = L(z)$ угол φ , под которым пересекаются окружности в плоскости (z) , равен углу между лучами в плоскости ζ , т.е. $\varphi = \arg \zeta(i)$.

$$\zeta(i) = \frac{\sqrt{3} + i}{i - \sqrt{3}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = -\frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\frac{4\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}},$$

следовательно, $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. Отсюда $p = \frac{3}{2}$, поэтому $w = \zeta^{3/2}$.

Итоговая формула преобразования такова:

$$w = \left(\sqrt{\frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)}} \right)^3 \cdot e^{i\frac{3}{2} \cdot \frac{4\pi}{3}} = \left(\sqrt{\frac{2z + (\sqrt{3} - i)}{2z - (\sqrt{3} + i)}} \right)^3 \cdot \triangleleft$$

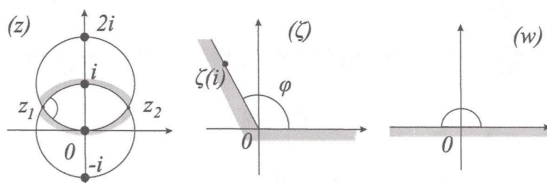


Рис. 37

9.5. Вопросы и задачи

1. Найдите образ области $D = \left\{ \frac{\pi}{6} < \arg z < \frac{\pi}{2} \right\} \cap \{|z| > 2\}$ при отображении $w = f(z)$, если

$$a) f(z) = z^2; \quad b) f(z) = z^3; \quad c) f(z) = \frac{1}{z^2}.$$

2. Найдите образы прямых $a) \operatorname{Re} z = c; \quad b) \operatorname{Im} z = c$ при отображении $w = z^2$.

3. Выясните, возможно ли выделение регулярных однозначных ветвей $F(z)$ в окрестности указанной точки:

$$a) F(z) = \sqrt[5]{z + 1 - 2i}; \quad z_1 = 0; \quad z_2 = -1 + 2i; \quad z_3 = \infty;$$

$$b) F(z) = \sqrt{i + \sqrt[4]{z}}; \quad z_1 = 0; \quad z_2 = 1; \quad z_3 = -1.$$

4. В области $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$ выделите однозначную регулярную ветвь $f(z)$ функции $w = \sqrt[4]{z}$, задаваемую условием $f(-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$, и найдите образ множества $\{|z| < 4, 0 < \arg z < \pi\}$ при отображении $f(z)$.

5. Отобразите конформно на верхнюю полуплоскость

- a) внешность отрезка $[0; 1]$;
- b) внешность множества $(-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$ ($a \in \mathbf{R}$);
- c) внешность множества $\{|z| = 1, -\frac{\pi}{2} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}\}$;
- d) четверть круга $\{|z| < 2, \frac{\pi}{2} < \arg z < \pi\}$;
- e) внешность полукруга $\{|z| > 3, \operatorname{Re} z > 0\}$;
- f) внутренность угла $\left\{ \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3} \right\}$ с разрезами по мнимой оси $\{(0; i] \cup [2i; \infty)\}$;
- g) множество $\left\{ 0 < \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$ с разрезом по дуге $\left\{ |z| = 1, \frac{\pi}{2} \leq \arg z < \frac{3\pi}{2} \right\}$;
- h) множество $\{|z| < 1\} \cap \{|z - i| > 1\}$.

§10. Показательная и логарифмическая функции

10.1. Показательная функция

Показательная функция имеет вид $w = e^z$, где экспонента e^z была введена в п. 4.2 следующим образом:

$$e^z = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (1)$$

Показательная функция определена при всех $z \in \mathbb{C}$, она не может быть доопределена по непрерывности в бесконечно удалённой точке, так как не существует $\lim_{z \rightarrow \infty} e^z$.

Во всех точках $z \in \mathbb{C}$ существует непрерывная производная $w' = e^z$ (см. пример с) п. 5.3). Поэтому показательная функция аналитична в $\mathbb{C}$. Так как всюду в области определения $w' = e^z \neq 0$, отображение, осуществляемое этой функцией, конформно в каждой точке.

В п. 4.2 установлено, что показательная функция периодична с основным периодом $T = 2\pi i$, значит, она неоднолистка в $\mathbb{C}$. Максимальной областью однолистности является внутренность полосы вида $\{y_0 < \operatorname{Im} z < y_0 + 2\pi\}$. В силу утверждения 2 п. 7.5 в этой области отображение $w = e^z$ конформно.

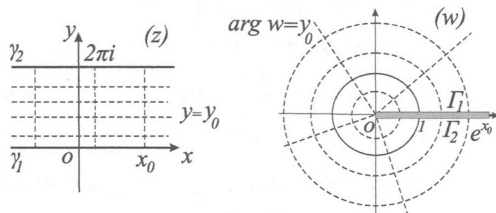


Рис. 38

Найдём, как преобразуется прямоугольная сетка в области $D_0 = \{0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$. Если $z = x + iy$, $w = |w| e^{i \arg w}$,

то из (1) следует $|w| = e^x$, $\arg w = y$. Поэтому образом прямой $y = c$ является луч $\arg w = c$. Отметим, в частности, что границы D_0 — прямые $y = 0$ и $y = 2\pi$ — преобразуются в положительную вещественную полуось плоскости (w). Вертикальный отрезок $x = c$, $0 < a \leq y \leq b < 2\pi$ переходит в дугу окружности $|w| = e^c$, $a \leq \arg w \leq b$, а весь отрезок $x = c$, $0 \leq y \leq 2\pi$ преобразуется в окружность $|w| = e^c$. Итак, образом области D_0 является плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, а прямоугольная сетка в D_0 отображается на полярную сетку в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ (рис. 38). Точно так же преобразуется любая полоса $D_k = \{2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$, $k \in \mathbb{Z}$.

Таким образом, имеет место

Утверждение 1. Показательная функция (1) аналитична в $\mathbb{C}$ и конформно отображает внутренность любой полосы $D_k = \{2\pi k < \operatorname{Im} z < 2\pi(k+1)\}$ на плоскость с разрезом $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$.

10.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ определяется как обратная к показательной функции $z = e^w$.

Из вышеизложенного следует, что логарифмическая функция определена на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (рис. 38) и является бесконечнозначной. Она имеет вид (см. п. 4.2)

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2)$$

При каждом фиксированном k получается однозначная ветвь логарифма $w_k = \ln |z| + i (\arg z + 2\pi k)$, где $\arg z \in [0; 2\pi)$. В области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ функция w_k непрерывна. Согласно теореме 6.3 w_k имеет там непрерывную производную $w'_k(z) = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}$, следовательно, аналитична.

Однозначная регулярная ветвь функции (2) при $k = 0$ называется *главной ветвью* и обозначается $\ln z = \ln |z| + i \arg z$.

Справедливо

Утверждение 2. Функция $w = \operatorname{Ln} z$ в каждой точке $\mathbb{C}$, кроме $z = 0$, имеет бесконечно много значений (2). На множестве $G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ она допускает выделение однозначных ветвей, каждая из которых аналитична в G и конформно отображает эту область на внутренность некоторой полосы D_k .

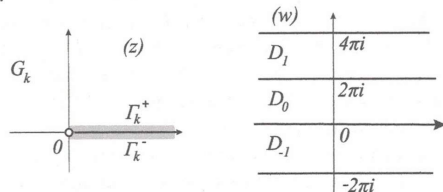


Рис. 39

10.3. Риманова поверхность

Рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ как совокупность множеств вида

$$\bar{D}_k = \{w : 2\pi k < \operatorname{Im} w \leq 2\pi(k+1)\}, \quad k \in \mathbb{Z},$$

(рис. 39), внутренность каждого из которых отображается функцией $z = e^w$ на множество $G_k = G = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$, а граница переходит в луч $\Gamma_k = \Gamma = \{z : \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z = 0\}$.

Обозначим $\gamma_k = \{w : \operatorname{Im} w = 2\pi k\}$. Показательная функция переводит границы γ_k и γ_{k+1} полосы D_k соответственно на верхний берег Γ_k^+ и нижний берег Γ_k^- одного и того же разреза по вещественной положительной полупрямой плоскости (z). Рассмотрим бесконечное количество листов G_k и соединим их в одну поверхность, "склеивая" границы Γ_k^- и Γ_{k+1}^+ при всех $k \in \mathbb{Z}$. Так получается риманова поверхность $\mathcal{R}$ функции $w = \operatorname{Ln} z$. Отображение $w : \mathcal{R} \rightarrow \mathbb{C}$ взаимно однозначно и непрерывно, при этом каждый лист римановой поверхности соответствует очередной регулярной однозначной ветви логарифма. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ (не принадле-

жащие $\mathcal{R}$) являются точками ветвления функции $w = \operatorname{Ln} z$.

Нетрудно видеть, что функция $w = \operatorname{Ln} z$ аналитична на $\mathcal{R}$. При этом любая однозначная ветвь, например $w = \ln z$, не является непрерывной на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ (но аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$).

10.4. Примеры

1. Найти образ при отображении $w = e^z$ следующих множеств:

- полосы $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$;
- полуполосы $\{z : \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{4}\}$;
- прямоугольника $\{z : c < \operatorname{Re} z < d, a < \operatorname{Im} z < b\}$, где $0 < b - a < 2\pi$.

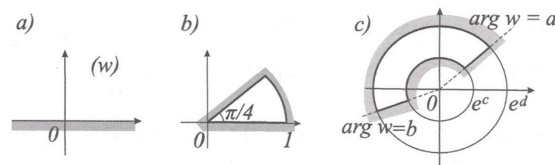


Рис. 40

▷ Результат получается на основе рассмотрений п. 10.1. Ответы изображены на рис. 40 <

2. Найти образ множества $\{z : |z| > 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении той однозначной ветвью $f(z)$ функции $F(z) = \operatorname{Ln} z$, для которой $f(ei) = 1 - \frac{3\pi}{2}i$.

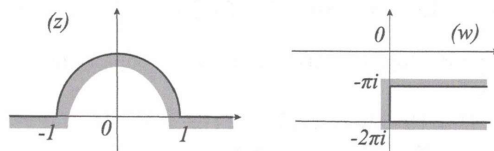


Рис. 41

▷ Так как $\operatorname{Ln}(ei) = \ln e + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right) = 1 + i \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right)$, условие задачи выполнено при $k = -1$. Поэтому данная область отображается на подмножество полосы D_{-1} . Имея в виду, что логарифмическая функция обратна к показательной, из результатов п. 10.1 получаем ответ (см. рис. 41) ◁

10.5. Вопросы и задачи

- Найдите образ множества D при отображении $w = e^z$, если
 - $D = \{\alpha < \operatorname{Im} z < \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$;
 - $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z < 0\}$;
 - $D = \{\pi < \operatorname{Im} z < 2\pi, \operatorname{Re} z > 0\}$;
 - D — прямая $\operatorname{Im} z = \operatorname{Re} z$.
- Найдите образ множества D при отображении $w = \ln z$, если
 - $D = \{\alpha < \arg z < \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$;
 - $D = \{0 < \arg z < \pi, |z| > 1\}$;
 - $D = \{\pi < \arg z < 2\pi, |z| < 2\}$;
 - D — кольцо $\{e < |z| < e^2\}$ с разрезом по вещественному интервалу $(e; e^2)$.
- Найдите образ множества $\{z : |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении той однозначной ветвью $f(z)$ функции $F(z) = \operatorname{Ln} z$, для которой $f\left(\frac{i}{2}\right) = -\ln 2 + \frac{5\pi}{2}i$.
- Найдите образ множества D при отображении $w = f(z)$, если
 - $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\}$, $f(z) = \operatorname{ctg} z$;
 - $D = \left\{-\frac{\pi}{4} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{4}\right\}$, $f(z) = \operatorname{tg} z$;

$$c) D = \left\{0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}, \quad f(z) = \operatorname{tg} \pi z.$$

- Найдите функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость множество D , если
 - $D = \left\{0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}\right\} \setminus \left\{\operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}, \operatorname{Re} z \geq 0\right\}$;
 - $D = \{\operatorname{Re} z > 2, 0 < \operatorname{Im} z < 2\pi\}$;
 - $D = \{|z| < 2\} \setminus \{|z - i| < 1\}$;
 - D — внешность множества $\{|z| < 1\} \cup \{|z - 3i| < 2\}$;
 - $D = \{\operatorname{Re} z < 0\} \cap \{|z + 3| > 3\}$;
 - $D = \{0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \setminus \left\{0 < \operatorname{Re} z \leq \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z = 0\right\}$;
 - $D = \{-\pi < \operatorname{Im} z < \pi\} \setminus [-\pi i; 0]$;
 - $D = \{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{|z - 2| > 2\} \cap \{|z - 4| < 4\}$;
 - $D = \{\operatorname{Re} z > 0\} \cap \{|z - 1| > 1\} \setminus [2; 3]$.

§11. Функция Жуковского

11.1. Определение и основные свойства

Функция Жуковского имеет вид

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right). \quad (1)$$

Функция Жуковского (обозначим ее для краткости $G(z)$) определена при всех $z \in \mathbb{C}$, кроме $z = 0$. После доопределения $G(0) = G(\infty) = \infty$ имеем отображение $G: \overline{\mathbb{C}} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$. Функция (1) аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, причем $w' = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{z^2} \right)$.

Так как $w' \neq 0$ при $z \neq \pm 1$, то в каждой точке $\mathbb{C}$, кроме $z = 0, z = \pm 1$, отображение посредством функции Жуковского конформно.

Можно показать, что в точках $z = 0$ и $z = \infty$ также имеется конформность. Действительно, поскольку $G(0) = \infty$, рассуждая так же, как при доказательстве теоремы 8.1, совершим преобразование $\zeta = \frac{1}{w}$, при котором $\zeta_0 = \zeta(w_0) = 0$. Тогда

$$\zeta(z) = \frac{2z}{z^2 + 1}, \quad \zeta'(z) = \frac{2(1 - z^2)}{(z^2 + 1)^2}, \quad \zeta'(0) = 2 \neq 0,$$

откуда следует конформность отображения G в точке $z_0 = 0$.

Аналогично изучается случай $z_0 = \infty$.

Функция $G(z)$ двулистка на области определения. В самом деле, для $z_1 \neq z_2$ имеем

$$G(z_1) = G(z_2) \Leftrightarrow z_1 - z_2 = \frac{z_1 - z_2}{z_1 z_2} \Leftrightarrow z_1 z_2 = 1 \Leftrightarrow z_2 = \frac{1}{z_1}.$$

Таким образом, всякая область, одновременно не содержащая точек z и $\frac{1}{z}$, является областью однолистности функции $G(z)$. Максимальные области однолистности суть $D_1 = \{|z| > 1\}$ – внешность единичного круга и $D_2 = \{|z| < 1\}$ – внутренность единичного круга, а также $D_3 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ – верхняя полуплоскость и $D_4 = \{\operatorname{Im} z < 0\}$ – нижняя полуплоскость.

Таким образом, получено

Утверждение 1. Функция Жуковского (1) аналитична в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ и осуществляет конформное отображение любой из областей D_k , $k = 1, \dots, 4$.

11.2. Отображения областей D_k

Пусть $z = r e^{i\varphi}$, тогда

$$\begin{aligned} w = u + iv &= \frac{1}{2} \left(r e^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + \frac{i}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (2)$$

Используя основное тригонометрическое тождество, исключим из этой системы φ :

$$\frac{u^2}{\frac{1}{4} \left(r + \frac{1}{r} \right)^2} + \frac{v^2}{\frac{1}{4} \left(r - \frac{1}{r} \right)^2} = 1. \quad (3)$$

С другой стороны, из (2) следует

$$\frac{u}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right), \quad \frac{v}{\sin \varphi} = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right),$$

поэтому

$$\frac{u^2}{\cos^2 \varphi} - \frac{v^2}{\sin^2 \varphi} = 1. \quad (4)$$

Уравнение (3) при каждом $r > 0$, $r \neq 1$, задает эллипс с фокусами в точках $w = \pm 1$ и полуосями $a = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right)$, $b = \frac{1}{2} \left| r - \frac{1}{r} \right|$; уравнением (4) для $\varphi \neq \frac{\pi}{2} k$ описывается семейство софокусных гипербол.

Рассмотрим в D_1 множество концентрических окружностей $|z| = r$, $r > 1$. Их образы – эллипсы – при $r \rightarrow 1$ уменьшаются и в пределе дают отрезок $[-1; 1]$. Лучи в D_1 , ортогональные окружностям, переходят в гиперболы (4), ортогональные в силу конформности отображения эллипсам (3).

Точнее, из (2) следует, например, что при перемещении точки z по лучу: $z = r e^{i\varphi_0}$, $r > 1$, $\varphi_0 \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$, ее образ движется по верхней части правой ветви гиперболы. Исключённые выше из рассмотрения лучи $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$ ($r > 1$) переходят в части вещественной прямой $\operatorname{Re} w > 1$ и $\operatorname{Re} w < -1$,

а лучи $\varphi = \pm \frac{\pi}{2}$ – в мнимые полуоси $\text{Im } w > 0$ и $\text{Im } w < 0$ соответственно. Также из (2) вытекает, что движению против часовой стрелки по окружности соответствует движение в том же направлении по эллипсу (рис. 42).

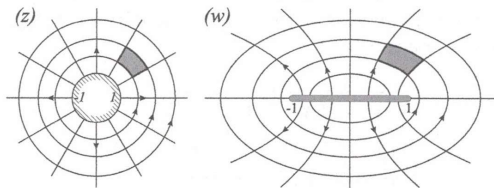


Рис. 42

Итак, функция Жуковского конформно отображает внешность единичного круга $D_1 = \{|z| > 1\}$ на внешность отрезка $[-1; 1]$ плоскости (w) . При этом образом окружности $r = 1$ является дважды проходимый отрезок $[-1; 1]$.

Поскольку при замене r на $\frac{1}{r}$ эллипс (3) остается тем же самым (меняется направление движения по нему), можно утверждать, что функция $G(z)$ конформно отображает внутренность единичного круга $D_2 = \{|z| < 1\}$ на внешность отрезка $[-1; 1]$, причём окружность $r = 1$ преобразуется в отрезок $[-1; 1]$, проходимый дважды (рис. 43).

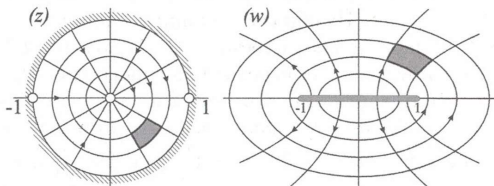


Рис. 43

Чтобы найти образ области $D_3 = \{\text{Im } z > 0\}$, исходя из

общих свойств конформных отображений, достаточно выяснить образ границы верхней полуплоскости – вещественной оси. Заметим, что при $z \in \mathbb{R}$ также и $G(z) \in \mathbb{R}$, причём либо $G(z) \geq 1$, либо $G(z) \leq -1$, поэтому при движении в плоскости (z) по частям $\gamma_1, \dots, \gamma_4$ действительной прямой в плоскости (w) получаются последовательно лучи вещественной оси $I^- = \{\text{Re } w \leq -1\}$ дважды и $I^+ = \{\text{Re } w \geq 1\}$ также дважды (рис. 44).

Итак, функция Жуковского конформно отображает верхнюю полуплоскость $D_3 = \{\text{Im } z > 0\}$ на внешность лучей $\mathbb{C} \setminus (I^- \cup I^+)$, причём образом границы $\text{Im } z = 0$ являются эти лучи, проходимые дважды.

Нетрудно показать, что при этом на верхнюю полуплоскость отображается внешность верхнего единичного полуокружности $\{|z| > 1, \text{Im } z > 0\}$, а на нижнюю – его внутренность.

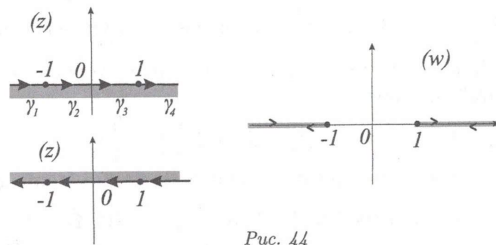


Рис. 44

Тот же образ $\mathbb{C} \setminus (I^- \cup I^+)$, имеет и нижняя полуплоскость D_4 , однако на верхнюю полуплоскость функция Жуковского отображает внутренность нижнего единичного полуокружности $\{|z| < 1, \text{Im } z < 0\}$, а на нижнюю – его внешность (рис. 44).

11.3. Примеры

1. Найти образ области $D = \{|z| < 1, \text{Im } z > 0\}$ при отображении $w = G(z)$.

▷ Полуокружность γ_1 функцией Жуковского отображается на отрезок $\Gamma_1 = \{-1 \leq \operatorname{Re} w \leq 1\}$ вещественной прямой; радиус $\gamma_2 = \{0 < \operatorname{Re} z \leq 1\}$ – на луч $\Gamma_2 = I^+$, а радиус $\gamma_3 = \{-1 \leq \operatorname{Re} z < 0\}$ – на луч $\Gamma_3 = I^-$. Учитывая сохранение ориентации границы относительно области при конформном отображении, имеем $G(D) = \{\operatorname{Im} w < 0\}$ (рис. 45) ◁

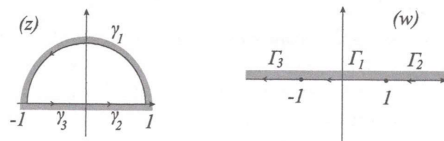


Рис. 45

2. Отобразить единичный круг $\{z : |z| < 1\}$ с разрезом $\{\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < 1, \operatorname{Im} z = 0\}$ на верхнюю полуплоскость.

▷ Задачу решает следующая последовательность преобразований (см. рис. 46).

а) $\zeta = G(z)$, здесь $\zeta(1) = 1$, $\zeta\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4}$;

б) $s = L(\zeta)$, где дробно-линейная функция L определяется отображением тройки $\left(-1; 0; \frac{5}{4}\right) \rightarrow (0; 1; \infty)$ и имеет

$$\text{вид } s = -\frac{5(\zeta + 1)}{4\zeta - 5};$$

в) $w = \sqrt{s}$.

Тогда окончательно: $w = \sqrt{-\frac{5(z^2 + 2z + 1)}{2(2z^2 - 5z + 2)}}$ ◁

3. Найти образ области $\{0 < \operatorname{Re} z < \pi, \operatorname{Im} z > 0\}$ при отображении $w = \cos z$.

▷ Так как $w = \cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = G(e^{iz})$,

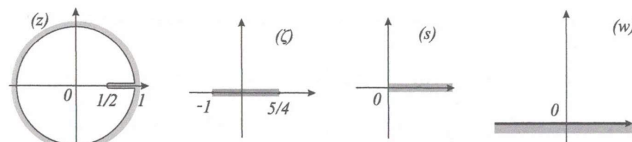


Рис. 46

совершаем последовательность отображений (рис. 47):

а) $\zeta = iz$ – поворот на угол $\frac{\pi}{2}$;

б) $s = e^\zeta$ – результатом является верхний единичный полукруг;

в) $w = G(s)$ – в итоге получается нижняя полуплоскость ◁

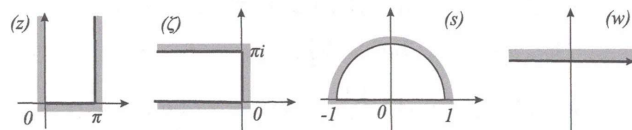


Рис. 47

11.4. Вопросы и задачи

1. Укажите области однолиственности функции Жуковского.
2. Докажите конформность отображения функцией Жуковского в точке $z = \infty$.
3. Найдите образ множества D при отображении функцией Жуковского, если

- а) $D = \{|z| = 1\}$; б) $D = \{|z| = 2\}$; в) $D = \left\{|z| = \frac{1}{2}\right\}$;
 д) $D = \{\operatorname{Im} z = 0\}$; е) $D = \{\operatorname{Re} z = 0\}$.

4. Найдите образ множества D при отображении $w = f(z)$, если

a) $D = \{0 < \operatorname{Im} z < \pi, \operatorname{Re} z > 0\}$, $f(z) = \operatorname{ch} z$;

b) $D = \left\{-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Re} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z > 0\right\}$, $f(z) = \sin z$;

c) $D = \{|z| < 1\} \setminus \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $f(z) = \frac{z}{z^2 + 1}$;

d) $D = \left\{0 < \arg z < \frac{\pi}{3}\right\}$, $f(z) = z^3 + \frac{1}{z^3}$.

5. Найдите функцию, конформно отображающую на верхнюю полуплоскость множество D , если

a) D — множество $\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{|z| > 2\}$ с разрезом $\{2 \leq \operatorname{Im} z \leq 3; \operatorname{Re} z = 0\}$;

b) D — множество $\{\operatorname{Im} z > 0\} \cap \{|z| < 1\}$ с разрезом $\left\{0 < \operatorname{Im} z \leq \frac{1}{2}; \operatorname{Re} z = 0\right\}$;

c) $D = \{|z| < 1\} \setminus \left\{\frac{1}{2} \leq |\operatorname{Re} z| < 1; \operatorname{Im} z = 0\right\}$;

d) $D = \{|z| < 1\} \setminus \left\{-\frac{1}{2} \leq \operatorname{Re} z < 1; \operatorname{Im} z = 0\right\}$;

e) $D = \left\{0 < \operatorname{Im} z < \frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z > 0\right\} \setminus \left\{0 < \operatorname{Re} z < 1; \operatorname{Im} z = \frac{\pi}{4}\right\}$;

f) $D = \{\operatorname{Re} z < 0\} \cap \left\{\left|z - \frac{i}{2}\right| > \frac{1}{2}, |z - i| < 1\right\}$;

g) $D = \left\{|z| > 2, \frac{\pi}{4} < \arg z < \frac{3\pi}{4}\right\} \setminus [2i; 4i]$;

h) $D = \{|\operatorname{Im} z| < \pi, \operatorname{Re} z < 1\} \setminus [0; 1]$.

Глава 3

Интегрирование функций комплексного переменного

§12. Определение и основные свойства интеграла

12.1. Понятие интеграла

Пусть γ — гладкая кривая на комплексной плоскости, соединяющая точки A и B ; её параметрическое представление:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad t \in [\alpha, \beta]. \quad (1)$$

Условимся, что начальная точка кривой $A = z(\alpha)$, а конечная — $B = z(\beta)$.

Пусть на кривой γ задана однозначная функция комплексного переменного $f(z)$.

Рассмотрим некоторое разбиение T этой кривой точками $A = z_0, \dots, z_n = B$ на конечное число частей $\gamma_1, \dots, \gamma_n$. Обозначим $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$, $s_k = |\Delta z_k| = |z_k - z_{k-1}|$. На каждом куске γ_k с концами в точках z_{k-1} и z_k выберем точку ζ_k и составим *интегральные суммы*

$$S(f, T) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k, \quad (2)$$

$$S_1(f, T) = \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) |\Delta z_k|. \quad (3)$$

Введем понятие предела интегральной суммы при условии $\lambda = \max_k s_k \rightarrow 0$ так же, как это делалось в курсе математического анализа [6] при рассмотрении криволинейных интегралов.

Определение. Если существуют пределы

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} S(f, T) \quad \text{и} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S_1(f, T),$$

не зависящие ни от способа разбиения кривой γ , ни от выбора точек $\{\zeta_k\}$, то говорят, что $f(z)$ интегрируема на γ , а значения этих пределов называют соответственно интегралом функции $f(z)$ по кривой γ и интегралом первого рода $f(z)$ по γ . Обозначения:

$$\int_{\gamma} f(z) dz \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} f(z) ds. \quad (4)$$

Теорема 12.1. Пусть $f(z)$ — непрерывная на гладкой кривой γ функция. Тогда существуют оба интеграла из (4), причём выполнены равенства

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy, \quad (5)$$

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt, \quad (6)$$

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} u ds + i \int_{\gamma} v ds, \quad (7)$$

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) |z'(t)| dt. \quad (8)$$

▷ Пусть $z = x + iy$, $\Delta z_k = \Delta x_k + i\Delta y_k$, $f(z) = u + iv$. Обозначим для краткости $f(\zeta_k) = u_k + iv_k$, тогда

$$\begin{aligned} S(f, T) &= \sum_{k=1}^n (u_k + iv_k) (\Delta x_k + i\Delta y_k) = \\ &= \sum_{k=1}^n (u_k \Delta x_k - v_k \Delta y_k) + i \sum_{k=1}^n (v_k \Delta x_k + u_k \Delta y_k). \end{aligned}$$

Условие $\lambda = \max_k s_k \rightarrow 0$ равносильно двум условиям одновременно: $\max_k \Delta x_k \rightarrow 0$ и $\max_k \Delta y_k \rightarrow 0$, поэтому при их выполнении сумма в предыдущем равенстве имеет пределы

$$\int_{\gamma} u dx - v dy \quad \text{и} \quad \int_{\gamma} v dx + u dy$$

соответственно (результат следует из теории вещественных криволинейных интегралов [6]). Тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} S(f, T) = \int_{\gamma} u dx - v dy + i \int_{\gamma} v dx + u dy.$$

Используя параметризацию (1) кривой γ и свойства криволинейного интеграла, продолжим преобразование полученного равенства (5):

$$\begin{aligned} &\int_{\alpha}^{\beta} (u x'(t) - v y'(t)) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (v x'(t) + u y'(t)) dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} (u + iv) (x'(t) + iy'(t)) dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \end{aligned}$$

— в приведенных выкладках под u и v понимаются $u(x(t), y(t))$ и $v(x(t), y(t))$.

В силу равенства

$$|dz| = ds = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = |z'(t)| dt,$$

аналогичным образом получаем (8).

Наконец, отметим очевидное равенство (7):

$$\int_{\gamma} f(z) |dz| = \int_{\gamma} u(x, y) ds + i \int_{\gamma} v(x, y) ds \quad \triangleleft$$

12.2. Свойства интегралов

Теорема 12.2. Имеют место следующие свойства интегралов (4):

$$a) \int_{AB} f(z) dz = - \int_{BA} f(z) dz;$$

б) интеграл первого рода не зависит от направления движения по γ ; интегрирование в формуле (8) всегда идет от меньшего значения параметра t к большему;

в) пусть γ_1 и γ_2 — части, составляющие кривую γ без наложения, тогда

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz,$$

причём интегралы в правой и левой частях равенства существуют одновременно;

г) пусть f и g — интегрируемые на γ функции, $a, b \in \mathbb{C}$ — произвольные числа, тогда

$$\int_{\gamma} (a f(z) + b g(z)) dz = a \int_{\gamma} f(z) dz + b \int_{\gamma} g(z) dz;$$

д) пусть f интегрируема на γ , тогда функция $|f|$ также интегрируема на γ , причём

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz|. \quad (9)$$

▷ Проведём доказательство в предположении, что рассматриваемые функции непрерывны на γ . В силу равенств (5) и (7) справедливость пунктов а)-г) следует из свойств вещественных интегралов первого и второго рода.

Для доказательства д) заметим, что если $f(z)$ непрерывна на γ , то и $|f(z)|$ также непрерывна, следовательно, интегрируема на γ . Неравенство (9) получается в результате предельного перехода в соответствующем неравенстве для интегральных сумм:

$$\left| \sum_{k=1}^n f(\zeta_k) \Delta z_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\zeta_k)| |\Delta z_k| \quad \triangleleft$$

Следствие. Если $\sup_{z \in \gamma} |f(z)| = M$, а L — длина кривой γ , то

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq M \cdot L.$$

▷ Согласно формуле (9) имеем

$$\left| \int_{\gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\gamma} |f(z)| |dz| \leq M \cdot \int_{\gamma} ds = M \cdot L \quad \triangleleft$$

Замечания. 1) Из свойства в) аддитивности интеграла следует, что утверждение теоремы 12.1 остаётся справедливым для кусочно гладкой кривой γ и кусочно непрерывной на этой кривой функции. При этих условиях сохраняются и свойства интегралов (см. теорему 12.2).

2) Теорема о среднем, справедливая для вещественного интеграла, не переносится на комплексный случай.

▷ В самом деле, пусть γ — отрезок $[0; 2\pi]$ вещественной прямой, тогда

$$\int_{\gamma} e^{iz} dz = \int_0^{2\pi} e^{it} dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t dt = 0.$$

В то же время $e^{i\zeta} \cdot \int_0^{2\pi} dt = e^{i\zeta} \cdot 2\pi \neq 0$, так как $e^z \neq 0$ при всех значениях z $\triangleleft$

12.3. Примеры

1. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} f(z) dz$, если

а) $f(z) = \operatorname{Im} z$, γ — часть параболы с вертикальной осью, соединяющей точки $z = 0$ и $z = 1 + 2i$;

б) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, γ — отрицательно ориентированная грани-

ца верхнего единичного полуокруга;

с) $f(z) = (z-a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \gamma_r : |z-a| = r$ — положительно ориентированная окружность;

д) $f(z) = (\sqrt[4]{z})^3 + 1$, где берётся та однозначная ветвь многозначной функции, для которой $\sqrt[4]{1} = i$; γ — полуокружность $\{|z| = 4, \operatorname{Re} z \geq 0\}$, от точки $z = -4i$ до точки $z = 4i$.

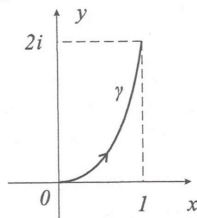


Рис. 48

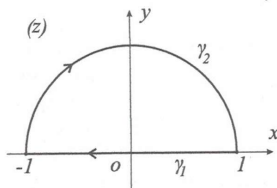


Рис. 49

▷ а) Выписав уравнение параболы $y = ax^2$, проходящей через точки $(0;0)$ и $(1;2)$ (рис. 48), получим параметризацию кривой γ : $x = t$, $y = 2t^2$, т.е. $z = t + 2it^2$, где $t \in [0;1]$.

Согласно (5) имеем

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z \, dz = \int_0^1 y \, dz = \int_0^1 2t^2 (1 + 4ti) \, dt = \frac{2}{3} t^3 + 2t^4 i \Big|_0^1 = \frac{2}{3} + 2i.$$

б) В силу аддитивности интеграла (свойство в) теоремы 12.2) задача сводится к вычислению суммы интегралов по отрезку действительной прямой γ_1 и полуокружности γ_2 . Движение по γ происходит по часовой стрелке (см. рис. 49).

На γ_1 : $z = x$, $x \in [-1; 1]$, $\bar{z} = x$, поэтому

$$I_1 = \int_{\gamma_1} f(z) \, dz = \int_1^{-1} dx = -2.$$

Кривая γ_2 задается в виде $z = e^{it}$, где $t \in [0; \pi]$. Поскольку $\bar{z} = e^{-it}$, имеем $f(z) = e^{-2it}$, $dz = ie^{it} dt$; тогда

$$I_2 = \int_{\gamma_2} f(z) \, dz = \int_{\pi}^0 ie^{-it} dt = \int_{\pi}^0 i(\cos t - i \sin t) dt = (i \sin t - \cos t) \Big|_{\pi}^0 = -2.$$

Ответом является сумма $I_1 + I_2 = -2 - 2 = -4$.

с) Окружность γ_r имеет параметризацию $z = a + re^{it}$, где $t \in [0; 2\pi]$. Стало быть, $dz = ire^{it} dt$ и, значит,

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_r} (z-a)^n \, dz &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} e^{i(n+1)t} dt = \\ &= \int_0^{2\pi} ir^{n+1} (\cos(n+1)t + i \sin(n+1)t) dt = \\ &= \frac{ir^{n+1}}{n+1} (\sin(n+1)t - i \cos(n+1)t) \Big|_0^{2\pi} = 0, \quad \text{если } n \neq -1. \end{aligned}$$

Для $n = -1$ получаем

$$\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = i \int_0^{2\pi} dt = 2\pi i.$$

Заметим, что результат не зависит ни от положения центра, ни от радиуса окружности.

д) Найдем указанную однозначную ветвь корня четвертой степени. В равенстве $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{|z|} e^{\frac{i}{4}(\arg z + 2\pi k)}$ надо взять $k = 1$, чтобы обеспечить условие $\sqrt[4]{1} = i$. Если $z \in \gamma$, то $z = 4e^{it}$, $t = \arg z \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, следовательно,

$$f(z) = \left(\sqrt{2} e^{\frac{i}{4}(t+2\pi)}\right)^3 + 1 = 2\sqrt{2} i^3 e^{i\frac{3t}{4}} + 1.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f(z) dz &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} 4i \left(-2\sqrt{2} i e^{i \frac{3t}{4}} + 1 \right) e^{it} dt = \\ &= 8\sqrt{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\cos \frac{7t}{4} + i \sin \frac{7t}{4} \right) dt + 4i \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos t + i \sin t) dt \\ &= 16\sqrt{2} \int_0^{\pi/2} \cos \frac{7t}{4} dt + 8i \int_0^{\pi/2} \cos t dt = \frac{64}{7} \sqrt{2} \sin \frac{7\pi}{8} + 8i \end{aligned}$$

2. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} f(z) |dz|$, где γ — часть параболы $y = x^2$ ($-1 \leq x \leq 1$), $f(z) = \operatorname{Im} z \cdot \sin(\operatorname{Re} z)$.

▷ Кривая γ имеет параметризацию $z = t + it^2$, $t \in [-1; 1]$. Поэтому

$$|dz| = |z'(t)| dt = |1 + 2ti| dt = \sqrt{1 + 4t^2} dt,$$

следовательно,

$$\int_{\gamma} \operatorname{Im} z \cdot \sin(\operatorname{Re} z) |dz| = \int_{-1}^1 t^2 \cdot \sin t \cdot \sqrt{1 + 4t^2} dt = 0$$

в силу нечётности подынтегральной функции

12.4. Вопросы и задачи

1. Сформулируйте и докажите свойства $\alpha)$ — $d)$ из теоремы 12.2 для интеграла первого рода $\int_{\gamma} f(z) |dz|$.

2. Пусть γ — кусочно гладкая кривая с началом в точке $z = a$ и с концом в $z = b$. Найдите, чему равны значения интегралов $\int_{\gamma} dz$ и $\int_{\gamma} |dz|$.

3. Вычислите $\int_{\gamma} f(z) dz$, если

a) $f(z) = z \operatorname{Re} z$, γ — отрезок прямой от точки $z = 0$ до точки $z = 2 + i$;

b) $f(z) = z \operatorname{Re} z$, γ — часть параболы $x = 2y^2$ от точки $z = 0$ до точки $z = 2 + i$;

c) $f(z) = (z - a)^n$, $n \in \mathbb{Z}$, $\gamma = \{|z - a| = r, -\pi \leq \arg(z - a) \leq 0\}$;

d) $f(z)$ — однозначная ветвь $\operatorname{Ln} z$, для которой $\operatorname{Ln} i = \frac{5}{2} \pi i$; $\gamma = \{|z| = 2, \operatorname{Im} z \geq 0\}$;

e) $f(z) = \bar{z}$; $\gamma: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, $a > 0$ (кривая ориентирована против часовой стрелки).

4. Вычислите $\int_{\gamma} f(z) |dz|$, если

a) $f(z) = \frac{z}{\bar{z}}$, γ — граница верхнего единичного полуокруга;

b) $f(z)$ — та однозначная ветвь функции $\sqrt{z}$, для которой $\sqrt{i} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$; γ — граница сектора

$$\left\{ |z| = 2, \frac{\pi}{3} \leq \arg z \leq \frac{2\pi}{3} \right\}.$$

5. Пусть $f(z)$ — непрерывная функция на кривой $\gamma: \{|z| = R, \operatorname{Im} z \geq 0\}$ и $|f(z)| \leq M$ при $z \in \gamma$. Докажите, что

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz \right| \leq \pi MR.$$

Верно ли это неравенство, если $\gamma = \{|z| = R, \operatorname{Im} z \leq 0\}$?

6. Докажите, что в условиях предыдущей задачи справедлива оценка

$$\left| \int_{\gamma} f(z) e^{iz} dz \right| < \pi M.$$

Указание. Примените неравенство $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$, $\varphi \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

§13. Интегральная теорема Коши

13.1. Случай односвязной области

Теорема 13.1 (Коши). Пусть D — односвязная область, $f(z)$ — однозначная функция, $f \in A(D)$. Тогда для любого замкнутого контура⁷ $\gamma \subset D$ справедливо равенство

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

▷ Как было установлено в п. 12.1,

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \oint_{\gamma} (u dx - v dy) + i \oint_{\gamma} (v dx + u dy). \quad (2)$$

Аналитичность $f(z)$ в D означает, что $f'(z) \in C(D)$, значит, функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны вместе с частными производными первого порядка в этой области. Пусть $G = \text{int } \gamma$. Применяя к вещественным криволинейным интегралам в (2) формулу Грина и учитывая условия Коши-Римана, получаем

$$J_1 = \oint_{\gamma} u dx - v dy = \iint_G \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$J_2 = \oint_{\gamma} v dx + u dy = \iint_G \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Поэтому $\oint_{\gamma} f(z) dz = J_1 + i J_2 = 0$ ◁

⁷ Напомним, что, если не оговорено противное, мы рассматриваем только простые (т.е. без самопересечений) кусочно-гладкие кривые

Замечание. Выше, в п. 6.1, при определении аналитической в области D функции упоминалось, что требование непрерывности в D производной излишне. Это ограничение требуется для применения формулы Грина (см. [6]) в доказательстве теоремы 13.1. Доказательство, использующее лишь существование производной, можно найти, например, в [3].

Следствие 1. Пусть D — ограниченная односвязная область с границей ∂D , $f(z) \in A(\bar{D})$. Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 0. \quad (3)$$

Следствие 2. Пусть D — односвязная область, $f(z) \in A(D)$. Тогда для любых точек $z_1, z_2 \in D$ интеграл $\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz$ не зависит от пути интегрирования (находящегося в D).

▷ Пусть γ — некоторая кривая с заданным на ней направлением, тогда обозначим через γ^{-1} ту же кривую с противоположной ориентацией. Для двух произвольных кусочно-гладких кривых $\gamma_1, \gamma_2 \subset D$, соединяющих точки z_1, z_2 , в силу теоремы 13.1 имеем (рис. 50):

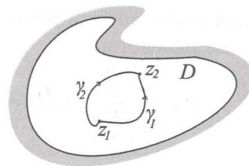


Рис. 50

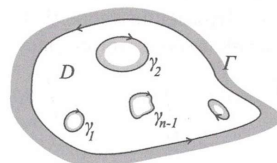


Рис. 51

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2^{-1}} f(z) dz = \oint_{\gamma} f(z) dz = 0 \quad (\text{здесь } \gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2^{-1})$$

$$\text{т.е. } \int_{\gamma_1} f(z) dz - \int_{\gamma_2} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz \quad \triangleleft$$

13.2. Случай составного контура и обобщение теоремы Коши

Теорема 13.2 (теорема Коши для составного контура). Пусть D – ограниченная n -связная область с полной границей ∂D , которая состоит из внешней границы – контура Γ и замкнутых контуров $\gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}$, составляющих внутренние границы. Если $f(z) \in \mathcal{A}(\bar{D})$, то

$$\int_{\partial D} f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz + \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 0,$$

причем интегрирование происходит в положительном направлении (т.е. область при движении по границе остается слева, см. рис. 51).

▷ Достаточно доказать теорему для двусвязной области, далее очевидно рассуждение по индукции.

Совершив "разрезы" по гладким кривым AB и KL , соединяющим точки на внешней Γ и внутренней γ частях границы D (рис. 52), получим односвязные области D_1 и D_2 . При этом Γ разбивается на части Γ_1 и Γ_2 , а кривая γ – на γ_1 и γ_2 . Применяя теорему 13.1 (направление интегрирования указано стрелками на рисунке), имеем равенства

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{KL} f(z) dz = \oint_{\partial D_1} f(z) dz = 0,$$

$$\int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{LK} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz = \oint_{\partial D_2} f(z) dz = 0,$$

сложение которых завершает доказательство:

$$\oint_{\partial D_1} f(z) dz + \oint_{\partial D_2} f(z) dz = \oint_{\Gamma} f(z) dz + \oint_{\gamma} f(z) dz = \int_{\partial D} f(z) dz = 0 \triangleleft$$

Следствие. В условиях теоремы 13.2

$$\oint_{\Gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^{n-1} \oint_{\gamma_k} f(z) dz,$$

где интегрирование всюду идет в одном направлении (например, против часовой стрелки).

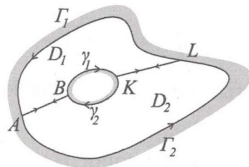


Рис. 52

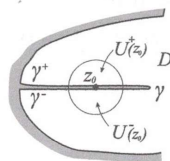


Рис. 53

Теорема 13.3 (обобщение теоремы Коши). Пусть D – ограниченная область с полной границей ∂D , которая состоит из замкнутых контуров и, возможно, разрезов. Если $f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(D \cup \partial D)$, то $\int_{\partial D} f(z) dz = 0$, причем интегрирование совершается в положительном направлении (без доказательства).

Обобщение состоит, во-первых, в ослаблении требований к $f(z)$ и, во-вторых, в добавлении разрезов в качестве элементов границы (проходимые дважды, они содержат точки самоналожения, т.е. не являются простыми кривыми, см. рис. 13, 53). В связи с возможностью использования разрезов возникает необходимость уточнения условия $f(z) \in C(D \cup \partial D)$ как непрерывности в области вплоть до границы.

А именно, считая, что разрез γ имеет два "берега" γ^+ и γ^- , рассмотрим точку $z_0 \in \gamma$, не совпадающую с концами разреза (рис. 53). Тогда существует такая окрестность $U(z_0)$, что множество $U(z_0) \setminus \gamma \subset D$ делится разрезом γ на две подобла-

сти: $U^+(z_0)$ и $U^-(z_0)$. Обозначим точку z_0 , рассматриваемую на границе $U^+(z_0)$, через z_0^+ , а на границе $U^-(z_0)$ — через z_0^- . Будем говорить, что функция $f(z)$ непрерывна в точке z_0^+ (z_0^-), если значение $f(z_0^+)$ ($f(z_0^-)$) совпадает с пределом $f(z)$ в точке z_0 по множеству $U^+(z_0)$ ($U^-(z_0)$).

Доказательства обобщений теоремы Коши см. в [3], [4].

13.3. Примеры

1. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} (z-a)^n dz$, $n \in \mathbb{Z}$,

где γ — произвольный замкнутый контур⁸, не проходящий через точку $z = a$.

▷ а) Пусть точка $a \in \text{ext } \gamma$. Тогда функция $f(z) = (z-a)^n \in \mathcal{A}(\text{int } \gamma)$, поэтому по теореме 13.1 получаем $I = 0$.

б) Пусть $a \in \text{int } \gamma$. Тогда существует окружность достаточно малого радиуса $\gamma_r: |z-a| = r$, которая целиком содержится внутри γ (рис. 54). Используя следствие из теоремы 13.2 и результат примера с) п. 12.3, получаем

$$I = \oint_{\gamma} (z-a)^n dz = \oint_{\gamma_r} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad \triangleleft$$

2. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{2z+i}$, где γ — эллипс $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$, проходимый по часовой стрелке.

▷ Заметим, что $z = -\frac{i}{2} \in \text{int } \gamma$. Поэтому, учитывая направление обхода, в соответствии с результатом примера

$$1) \text{ п. б) имеем } I = \frac{1}{2} \oint_{\gamma} \frac{dz}{z + \frac{i}{2}} = -\frac{1}{2} \cdot 2\pi i = -\pi i \quad \triangleleft$$

⁸ По умолчанию рассматривается положительная ориентация контура.

3. Вычислить интеграл $I = \int_{\gamma} z e^{\sin^2 z} dz$, где γ — произвольная кривая, соединяющая точки $z = -i$ и $z = i$.

▷ Так как $f(z) = z e^{\sin^2 z} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, то I не зависит от выбора пути интегрирования, так что в качестве последнего можно взять отрезок мнимой оси, соединяющий точки $z = -i$ и $z = i$. Итак, $z = it$, $t \in [-1; 1]$, поэтому

$$I = \int_{-1}^1 it \cdot e^{\sin^2(it)} i dt = - \int_{-1}^1 t \cdot e^{-\sin^2 t} dt = 0$$

в силу нечетности подынтегральной функции $\triangleleft$

13.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите интеграл $I = \oint_{\gamma} f(z) dz$, если

a) $f(z) = \frac{1}{2iz+5}$, где $\gamma: |x| + |y| = 4$;

b) $f(z) = \frac{1}{(2iz+5)^3}$, где $\gamma: |x| + |y| = 4$;

c) $f(z) = \frac{1}{2iz+5}$, где $\gamma: |x| + |y| = 1$.

2. Вычислите $\int_{\gamma} e^{\sin z} \cos z dz$, где $\gamma = \{z: |z| = 2, \text{Im } z \geq 0\}$, интегрирование идет от $z = -2$ до $z = 2$.

3. Пусть $D = \{z: 1 < |z| < 2\}$, функция $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$, причем $\oint_{|z|=2} f(z) dz = 2i$. Найдите значение интеграла $\oint_{|z|=1} f(z) dz$.

4. Пусть D — односвязная область, функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, $\gamma \subset D$ — замкнутый контур. Чему равно значение интеграла $\oint_{\gamma} \overline{f(z)} d\bar{z}$?

5. Пусть $f(z)$ аналитична в односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ за исключением точки z_0 , в которой существует предел $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = 0$. Докажите, что для любого замкнутого контура $\gamma \subset D$, $z_0 \notin \gamma$, справедливо равенство $\int_{\gamma} f(z) dz = 0$.

§14. Интегральная формула Коши и ее следствия

14.1. Интегральная формула Коши

Теорема 14.1. Пусть $f(z)$ — функция однозначная и аналитическая в области D , γ — произвольный замкнутый контур, вместе с внутренностью принадлежащий D , $z_0 \in \text{int } \gamma$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (1)$$

Равенство (1) называется *интегральной формулой Коши*.

▷ Так как z_0 — внутренняя точка области $\text{int } \gamma$ (рис. 55), существует окружность $\gamma_{\rho}: |z - z_0| = \rho$, находящаяся внутри γ . Поскольку $\frac{f(z)}{z - z_0} \in \mathcal{A}(\bar{G})$, где $G = \text{int } \gamma \setminus \{|z - z_0| \leq \rho\}$, то, согласно следствию из теоремы 13.2,

$$\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2)$$

Используя равенство, полученное в примере с) п. 12.3: $\oint_{\gamma_{\rho}} \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i$, преобразуем разность

$$\oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) = \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz =$$

$$= \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz = \left\{ \begin{array}{l} z - z_0 = \rho e^{it} \\ dz = \rho i e^{it} dt \\ 0 \leq t \leq 2\pi \end{array} \right\} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)) i dt.$$

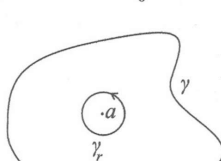


Рис. 54

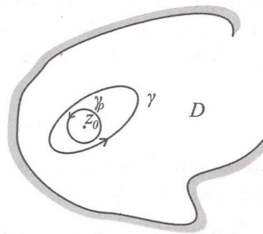


Рис. 55

Поэтому

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - 2\pi i f(z_0) \right| = \left| \int_0^{2\pi} (f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)) i dt \right| \leq$$

$$\int_0^{2\pi} |f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)| dt \leq 2\pi \cdot \max_{t \in [0; 2\pi]} |f(z_0 + \rho e^{it}) - f(z_0)|,$$

где правая часть стремится к нулю, когда $\rho \rightarrow 0$ (при этом условии $z \rightarrow z_0$ и, следовательно, $f(z) \rightarrow f(z_0)$ в силу непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0). Итак, существует

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0).$$

Но из (2) следует, что интеграл в левой части предыдущего равенства не зависит от ρ , поэтому

$$\oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0),$$

откуда и вытекает (1) ◁

Замечания. 1) Область D в условии теоремы 14.1 может быть неодносвязной.

2) Интеграл в формуле (1) называется *интегралом Коши*.

Другой вариант интегральной формулы Коши даёт

Теорема 14.2. Пусть D — ограниченная n -связная область с границей $\partial D = \Gamma \cup \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_{n-1}$, функция $f(z) \in A(\bar{D})$. Тогда в любой точке $z_0 \in D$

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz, \quad (3)$$

где интеграл берётся по положительно ориентированной полной границе ∂D .

▷ Поясним результат в случае двусвязной области с границей $\partial D = \Gamma \cup \gamma_1$ (рис. 56). Как и в предыдущем доказательстве, выберем такую окружность $\gamma_\rho: |z - z_0| = \rho$, чтобы $\text{int } \gamma_\rho \subset D$. Тогда по теореме 13.2

$$\oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_\rho^{-1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_1^{-1}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 0,$$

где кривая γ с направлением по часовой стрелке обозначена γ^{-1} . Отсюда

$$\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\Gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \oint_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - z_0} dz.$$

Далее доказательство повторяет предыдущее <

Следствие. В более общем виде формула Коши выглядит так:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} f(z_0), & \text{если } z_0 \in \text{int } \gamma \\ 0, & \text{если } z_0 \in D \cap \text{ext } \gamma \end{cases}$$

(в условиях теоремы 14.1).

14.2. Формула среднего значения. Локальный принцип максимума модуля

Следствиями интегральной формулы Коши являются также теоремы 14.3, 14.4.

Теорема 14.3 (формула среднего значения). Пусть $\gamma_R: |z - z_0| = R$ — окружность, которая вместе с внутренностью расположена в области аналитичности функции $f(z)$. Тогда

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R e^{i\varphi}) d\varphi, \quad (4)$$

или

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint_{\gamma_R} f(z) ds. \quad (5)$$

▷ Формула (4) следует из (1) после замены $z = z_0 + R e^{i\varphi}$ (см. аналогичные выкладки в доказательстве теоремы 14.1). Для получения (5) заметим, что $ds = R d\varphi$ <

Теорема 14.4 (принцип максимума модуля). Модуль $|f(z)|$ аналитической в области D функции f не может достигать строгого локального максимума в D .

▷ Предположим противное: найдется точка $z_0 \in D$ такая, что в некоторой ее проколотой окрестности $\dot{U}(z_0)$ имеет место неравенство $|f(z_0)| > |f(z)|$. Тогда при достаточно малом $\rho > 0$ окружность $\gamma_\rho = \{z - z_0| = \rho\} \subset \dot{U}(z_0)$. Поскольку γ_ρ — компакт, вещественнозначная непрерывная функция $|f(z)|$ принимает на γ_ρ максимальное значение, следовательно, $\max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| < |f(z_0)|$. Поэтому в силу (5)

$$\begin{aligned} |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\gamma_\rho} f(z) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\gamma_\rho} |f(z)| ds \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi\rho} \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| \oint_{\gamma_\rho} ds = \max_{z \in \gamma_\rho} |f(z)| < |f(z_0)| \end{aligned}$$

— противоречие <

14.3. Примеры

Интегральная формула Коши (1) может быть использована для вычисления интегралов.

1. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)}$ при различных положениях контура γ (γ не проходит через точки $z = 0, 1, -1$).

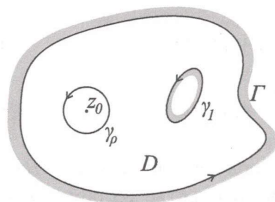


Рис. 56

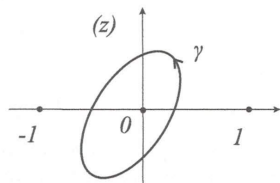


Рис. 57

▷ а) Пусть $z_0 = 0 \in \text{int } \gamma$, а точки $z = 1, -1 \in \text{ext } \gamma$ (рис. 57). Тогда, выбирая $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, по формуле (1) имеем

$$I_1 = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z} dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i.$$

б) Пусть $z_0 = 1 \in \text{int } \gamma$, а точки $z = 0, -1 \in \text{ext } \gamma$ (рис. 58). Тогда при $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$ по формуле (1) получаем

$$I_2 = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z-1} dz = 2\pi i f(1) = \pi i.$$

в) Если же $z_0 = -1 \in \text{int } \gamma$, а точки $z = 0, 1$ находятся вне γ , то имеем $f(z) = \frac{1}{z(z-1)}$, следовательно,

$$I_3 = \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z+1} dz = 2\pi i f(-1) = \pi i.$$

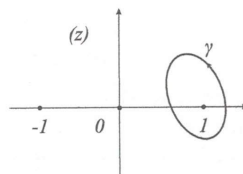


Рис. 58

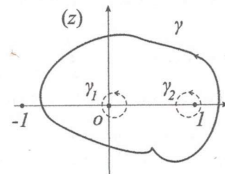


Рис. 59

г) Рассмотрим ситуацию, когда $z = 0, 1 \in \text{int } \gamma$, а точка $z = -1 \in \text{ext } \gamma$ (рис. 59). Для вычисления интеграла используем теорему Коши для составного контура и результаты п.п. а), б) настоящей задачи. Пусть γ_1 и γ_2 — замкнутые кривые, внутри которых находятся точки $z = 0$ и $z = 1$ соответственно, причем обе кривые принадлежат $\text{int } \gamma$. Тогда

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{z(z^2-1)} = \oint_{\gamma_1} \frac{dz}{z(z^2-1)} + \oint_{\gamma_2} \frac{dz}{z(z^2-1)} = I_1 + I_2 = -\pi i.$$

Аналогично можно рассмотреть оставшиеся случаи ◁

2. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{\sin z}{2z^2 + \pi z} dz$,

где $\gamma: \left| z + \frac{\pi}{2} \right| = 1$.

▷ Перепишав интеграл в виде $I = \oint_{\gamma} \frac{\frac{\sin z}{2z}}{z + \frac{\pi}{2}} dz$, приме-

ним формулу (1) при $z_0 = -\frac{\pi}{2}$, $f(z) = \begin{cases} \frac{\sin z}{2z}, & z \neq 0, \\ \frac{1}{2}, & z = 0, \end{cases}$ где

$f(z) \in \mathcal{A}(\text{int } \gamma)$. Тогда

$$I = \oint_{\gamma} \frac{\sin z}{2z^2 + \pi z} dz = 2\pi i f(z_0) = \frac{2\pi i}{\pi} = 2i \quad \triangleleft$$

14.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите $\int_{\gamma} \frac{e^z}{z^2 + 2iz} dz$, где γ – замкнутый контур, проходимый по часовой стрелке, если
- a) $z = 0 \in \text{int } \gamma$, $z = -2i \in \text{ext } \gamma$; b) $z = -2i \in \text{int } \gamma$, $z = 0 \in \text{ext } \gamma$; c) $z = 0 \in \text{ext } \gamma$, $z = -2i \in \text{ext } \gamma$;
d) $z = 0 \in \text{int } \gamma$, $z = -2i \in \text{int } \gamma$.

2. Вычислите $\int_{\gamma} \frac{\cos \pi z}{2 + z - z^2} dz$, где γ – замкнутый контур, проходимый против часовой стрелки, если
- a) $z = -1 \in \text{int } \gamma$, $z = 2 \in \text{ext } \gamma$; b) $z = 2 \in \text{int } \gamma$, $z = -1 \in \text{ext } \gamma$; c) $z = -1 \in \text{ext } \gamma$, $z = 2 \in \text{ext } \gamma$;
d) $z = -1 \in \text{int } \gamma$, $z = 2 \in \text{int } \gamma$.

3. Вычислите $\int_{\gamma} \frac{z dz}{(e^z + 1)(2iz + \pi)}$, где γ – проходимый против часовой стрелки замкнутый контур:
- a) $\gamma: |z| = 1$; b) $\gamma: |z| = 3$.

4. Пусть $\gamma = \{z: |z + 1| = 5\}$, функция $f(z)$ – линейная. Известно, что $\oint_{\gamma} \frac{f(z)}{z^2 - 5z + 6} dz = 2\pi$, причем $f(2) = 2i$. Найдите $f(z)$.

5. Вычислив интеграл $\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-a^{-1})}$, $0 < a < 1$, докажите равенство

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2} = \frac{2\pi}{1 - a^2}.$$

6. Докажите, что аналитическая и ограниченная в $\mathbb{C}$ функция $f(z)$ является постоянной (теорема Лиувилля).

Указание. Вычислите интеграл $\int_{|z|=R} \frac{f(z)}{(z-a)(z-b)} dz$, где $|a|, |b| < R$, $a \neq b$, и воспользуйтесь оценкой этого интеграла при $R \rightarrow +\infty$.

7. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{K}_R)$, где $\overline{K}_R = \{|z - z_0| \leq R\}$. Докажите, что тогда из условия $\max_{\overline{K}_R} |f(z)| = |f(z_0)|$ следует $f(z) \equiv \text{const}$ в $\overline{K}_R$.

§15. Существование производных всех порядков у аналитической функции

15.1. Интеграл типа Коши

Определение. Пусть γ – кусочно-гладкая кривая, f – однозначная функция, непрерывная на γ . Интеграл

$$g(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \gamma \quad (1)$$

называется *интегралом типа Коши*.

Теорема 15.1. Пусть $f \in C(\gamma)$. Тогда $g \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \gamma)$, причём для любого $n \in \mathbb{N}$ существует

$$g^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta. \quad (2)$$

▷ Пусть L – длина кривой γ , число $M > 0$ такое, что $|f(\zeta)| \leq M$ при $\zeta \in \gamma$ (почему M существует?) Зафиксируем произвольно выбранную точку $z \notin \gamma$ и докажем, что $\forall n \in \mathbb{N}$ существует производная $g^{(n)}(z)$, вычисляемая по формуле (2). Доказательство проведём по индукции.

Заметим, что найдется окрестность $U(z)$ точки z , не имеющая общих точек с γ . Пусть $d = \rho(\overline{U(z)}, \gamma)$, тогда $d > 0$. Возьмем настолько малое приращение h , что $z + h \in U(z)$ и рассмотрим

$$\begin{aligned}
 g(z+h) - g(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z - h} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta &= \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = \\
 &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta.
 \end{aligned}$$

Учитывая неравенства $|\zeta - z| > d$, $|\zeta - z - h| > d$, оценим

$$\begin{aligned}
 \left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta \right| &= \\
 &= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(\zeta) h}{(\zeta - z - h)(\zeta - z)^2} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\zeta)| |h|}{|\zeta - z - h| \cdot |\zeta - z|^2} ds \\
 &\leq \frac{M |h|}{2\pi d^3} \int_{\gamma} ds = \frac{M L |h|}{2\pi d^3} \rightarrow 0 \quad \text{при } h \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

Следовательно, существует $g'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta$.

Итак, в каждой точке $z \notin \gamma$ области D интеграл типа Коши (1) имеет производную. Ниже будет показано, что существует и $g''(z)$, значит, $g'(z)$ непрерывна, поэтому $g(z) \in A(C \setminus \gamma)$.

Далее, пусть $g^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$.

Покажем, что справедливо равенство (2). Рассмотрим раз-

ность

$$\begin{aligned}
 &\frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} = \\
 &= \frac{(n-1)!}{2\pi i h} \int_{\gamma} \frac{(\zeta - z)^n - (\zeta - z - h)^n}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^n} f(\zeta) d\zeta.
 \end{aligned}$$

Преобразуем при $h \rightarrow 0$ выражение

$$\begin{aligned}
 (\zeta - z)^n - (\zeta - z - h)^n &= (\zeta - z)^n \left(1 - \left(1 - \frac{h}{\zeta - z} \right)^n \right) = \\
 &= (\zeta - z)^n \cdot \frac{nh + O(h^2)}{\zeta - z} = nh(\zeta - z)^{n-1} (1 + O(h)), \quad (3)
 \end{aligned}$$

принимая во внимание, что $\left| \frac{h}{\zeta - z} \right| \leq \frac{|h|}{d} \rightarrow 0$.

Поэтому, дважды используя равенство (3), получаем

$$\begin{aligned}
 &\frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \\
 &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{(1 + O(h)) f(\zeta)}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)} d\zeta - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta = \\
 &= \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{((\zeta - z)^n - (\zeta - z - h)^n) + (\zeta - z)^n O(h)}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^{n+1}} f(\zeta) d\zeta = \\
 &= \frac{n n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{h(1 + O(1))}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^2} f(\zeta) d\zeta.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 &\left| \frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} - \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \right| = \\
 &= \frac{n n!}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{h(1 + O(1))}{(\zeta - z - h)^n \cdot (\zeta - z)^2} f(\zeta) d\zeta \right| \leq
 \end{aligned}$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \int_{\gamma} \left| \frac{(1+O(1))h}{(\zeta-z-h)^n \cdot (\zeta-z)^2} \right| |f(\zeta)| ds \leq$$

$$\frac{n! M_1 M |h|}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{ds}{|\zeta-z-h|^n \cdot |\zeta-z|^2} \leq \frac{n! M_1 M L}{2\pi d^{n+2}} \cdot |h|,$$

где $|1+O(1)| \leq M_1$ в некоторой окрестности точки z .

Из последней оценки следует существование $g^{(n)}(z) =$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g^{(n-1)}(z+h) - g^{(n-1)}(z)}{h} = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \quad \triangleleft$$

15.2. Бесконечная дифференцируемость аналитической функции

Следствием предыдущей теоремы является замечательный результат:

Теорема 15.2. Функция $f(z)$, аналитическая в области D , имеет в этой области производную любого порядка, причём

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta, \quad (4)$$

где γ — произвольный замкнутый контур, вместе с внутренней частью лежащий в D , $z \in \text{int } \gamma$.

▷ Зафиксируем произвольно выбранную точку $z \in D$ и возьмем контур γ , удовлетворяющий требованию теоремы. В силу интегральной формулы Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z} d\zeta.$$

Интеграл Коши, стоящий справа, является частным случаем интеграла типа Коши, поэтому к нему применима теорема 15.1. Поскольку z — произвольная точка области D , теорема доказана $\triangleleft$

Следствие (неравенство Коши для производных).

Пусть $K_R = \{\zeta : |\zeta-z| < R\}$, $\gamma_R = \{\zeta : |\zeta-z| = R\}$, $f(z) \in \mathcal{A}(K_R)$, $M_R = \max_{z \in \gamma_R} |f(z)|$. Тогда

$$|f^{(n)}(z)| \leq \frac{n! M_R}{R^n}. \quad (5)$$

▷ Из формулы (4) получаем

$$|f^{(n)}(z)| = \frac{n!}{2\pi} \left| \oint_{\gamma_R} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \oint_{\gamma_R} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta-z|^{n+1}} ds \leq$$

$$\leq \frac{n! M_R}{2\pi R^{n+1}} \oint_{\gamma_R} ds = \frac{n! M_R}{R^n} \quad \triangleleft$$

15.3. Теорема Лиувилля и ее следствие

Определение. Функция $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ называется целой.

Теорема 15.3 (Лиувилль). Всякая целая функция, ограниченная в $\mathbb{C}$, является константой.

▷ Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, и существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leq M \quad \forall z \in \mathbb{C}$. Рассмотрим произвольную окружность $\gamma_R : |\zeta-z| = R$. Тогда согласно формуле (5)

$$|f'(z)| \leq \frac{M}{R}.$$

Поскольку R может быть сколь угодно большим, а $f'(z)$ не зависит от R , из этой оценки следует $|f'(z)| = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$, т.е. $f'(z) = u'_x + i v'_x \equiv 0$. Откуда $u'_x = 0$, $v'_x = 0$, а вследствие условий Коши-Римана и $u'_y = 0$, $v'_y = 0$ всюду. Таким образом, $f(z) \equiv \text{const} \quad \triangleleft$

Следствие (основная теорема высшей алгебры).

Пусть $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_0 \neq 0$, $a_k \in \mathbb{C}$, — многочлен степени $n \geq 1$. Тогда $P_n(z)$ имеет по крайней мере один корень (следовательно, у $P_n(z)$ ровно n корней считая с кратностью).

▷ Предположим противное: $P_n(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда функция $f(z) = \frac{1}{P_n(z)} \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, причем $f(z) \rightarrow 0, |z| \rightarrow \infty$. Отсюда следует ограниченность $f(z)$ во всей плоскости. В самом деле, для произвольно взятого положительного числа M_1 можно указать такое R , что $|f(z)| < M_1$ при $|z| > R$. С другой стороны, непрерывная действительная функция $|f(z)|$ ограничивается сверху некоторым числом M_2 на компакте $\{|z| \leq R\}$. Значит, $|f(z)| \leq M = \max\{M_1, M_2\}$ в $\mathbb{C}$. Поэтому по теореме Лиувилля $f(z) \equiv \text{const}$, что противоречит определению $f(z)$ <

15.4. Примеры

1. Вычислить интеграл $I = \oint_{\gamma} \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} dz$, если $i \in \text{int } \gamma, -i \in \text{ext } \gamma$.

▷ Пусть $z_0 = i, f(z) = \frac{e^z}{(z+i)^2}$, тогда по формуле (4)

$$\begin{aligned} I &= \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-i)^2} dz = 2\pi i f'(z_0) = \\ &= 2\pi i e^z \frac{z+i-2}{(z+i)^3} \Big|_{z=i} = \frac{\pi}{2} e^i (1-i) \quad < \end{aligned}$$

2. Найти $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, удовлетворяющую условию $|f(z)| \leq e^{-|z|} \forall z \in \mathbb{C}$.

▷ Из условия задачи следует $|f(z)| \leq 1 \forall z \in \mathbb{C}$. Тогда по теореме Лиувилля $f(z) \equiv \text{const}$. Так как при $|z| \rightarrow \infty$ имеем $f(z) \rightarrow 0$, то $f(z) \equiv 0$ <

15.5. Вопросы и задачи

1. Вычислите данный интеграл по замкнутому контуру (направление – против часовой стрелки):

$$a) \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^5} dz; \quad b) \int_{|z-i|=2} \frac{\text{sh } z}{z(z^2+4)^2} dz;$$

$$c) \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} \frac{\sin \frac{1}{z}}{(z^2-1)(z+1)} dz.$$

2. Вычислите $\int_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^3} dz$, где γ – эллипс $4x^2 + y^2 = 2y$, проходимый против часовой стрелки.

3. Известно, что для некоторой непрерывной функции $f(\zeta)$ и некоторой гладкой кривой γ имеет место равенство

$$\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = z \sin z, \quad z \notin \gamma.$$

Найдите, чему равен интеграл $\int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta$.

4. Найдите аналитическую функцию $f(z)$ из следующих условий: $f(\pi) = 1$; $\int_{|\zeta|=5} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta = 2 \cos z, |z| < 5$.

5. Докажите, что если целая функция $f(z)$ при всех z отвечает условию $|f(z)| \geq 1$, то $f = \text{const}$.

6. Найдите все целые функции $f(z)$, для которых выполнено неравенство $|f(z)| \leq \left| \frac{z+1}{z-1} \right|$ при $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$.

7. Найдите все целые функции $f(z)$, отвечающие условию $f(z) = O(|z|^{-1})$ при $z \rightarrow \infty$.

8. Докажите, что если при всех $z \in \mathbb{C}$ для целой функции $f(z)$ имеет место оценка $|f(z)| \leq M|z|^\alpha$, где $\alpha \geq 0$, а $M > 0$ – некоторая постоянная, то $f(z)$ – полином степени не выше $k = [\alpha]$, где $[\alpha]$ – целая часть α (обобщение теоремы Лиувилля).

§16. Первообразная и неопределённый интеграл.

Теорема Морера

16.1. Основное утверждение

Пусть $f(z)$ – непрерывная в некоторой области D функция и пусть для всякого замкнутого контура $\gamma \subset D$ выполнено равенство

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

Тогда из таких же рассуждений, как в следствии 2 п. 13.1, следует, что интеграл функции $f(z)$ не зависит от выбора кривой интегрирования, соединяющей в D некоторые точки z_0 и z . Таким образом, при фиксированном значении z_0

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta. \quad (2)$$

– однозначная функция z .

Теорема 16.1 Пусть $f \in C(D)$ и для всякого замкнутого контура $\gamma \subset D$ выполнено условие (1). Тогда при любых $z_0, z \in D$ функция $F(z)$, определяемая равенством (2), является аналитической в области D , причем $F'(z) = f(z)$.

▷ Фиксируем какую-то точку $z_0 \in D$ и выбранную произвольно $z \in D$. Поскольку z – внутренняя точка области D , существует окрестность $U(z)$, целиком лежащая в D . Возьмем точку $z + h \in U(z)$ и рассмотрим разность

$$\frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) = \frac{1}{h} \left(\int_{z_0}^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta \right) - f(z),$$

где второй интеграл – это интеграл по какой-то кривой, соединяющей в D точки z_0 и z , а первый интеграл берется по той же кривой и далее по отрезку $[z; z+h]$.

Заметив, что $\int_z^{z+h} d\zeta = (z+h) - z = h$, продолжим пре-

образования:

$$\frac{1}{h} \int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - f(z) = \frac{1}{h} \left(\int_z^{z+h} f(\zeta) d\zeta - \int_z^{z+h} f(z) d\zeta \right) = \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta.$$

Поэтому, используя неравенство (9) п. 12.2, получаем

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_z^{z+h} (f(\zeta) - f(z)) d\zeta \right| \leq$$

$$\frac{1}{|h|} \int_z^{z+h} |f(\zeta) - f(z)| |d\zeta| \leq \frac{1}{|h|} \cdot \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \int_z^{z+h} |d\zeta|$$

$$= \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| = \max_{\zeta \in [z, z+h]} |f(\zeta) - f(z)| \rightarrow 0$$

при $h \rightarrow 0$, поскольку $f(z)$ непрерывна в точке z . Это означает, что в произвольной точке $z \in D$ существует

$$F'(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(z+h) - F(z)}{h} = f(z).$$

Таким образом, $F'(z) \in C(D)$, значит, функция $F(z)$ аналитическая в D ◁

Следствие (теорема Морера). Пусть $f(z)$ – непрерывная в области D функция и пусть для всякого замкнутого контура $\gamma \subset D$ выполнено равенство $\oint_{\gamma} f(z) dz = 0$.

Тогда $f(z) \in \mathcal{A}(D)$.

▷ Пусть $F(z) = \int_{z_0}^z f(\zeta) d\zeta$, где интегрирование идет по какому-то пути в D , соединяющему точки $z_0, z \in D$. По теореме 16.1 $F'(z) \in \mathcal{A}(D)$, причём $F'(z) = f(z)$. Тогда в силу теоремы 15.2 функция $F(z)$ имеет и вторую непрерывную в D производную, т.е. функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ ◁

Теорема Морера в определённом смысле является обратной к интегральной теореме Коши.

16.2. Первообразная

Определения. Аналитическая функция $F(z)$ называется первообразной функции $f(z)$ в области D , если в этой области $F'(z) = f(z)$.

Множество всех первообразных функции $f(z)$ называется неопределённым интегралом этой функции

Отметим ряд результатов относительно первообразных.

Утверждение 1. Если D — односвязная область, то функция $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ имеет первообразную, определяемую равенством (2).

▷ Утверждение следует из теорем 13.1 и 16.1 ◁

Утверждение 2. $F(z)$ и $\Phi(z)$ — две первообразные для функции $f(z)$ в области D тогда и только тогда, когда $F(z) - \Phi(z) = C$ при любом $z \in D$.

▷ Пусть $F(z)$ — первообразная для функции $f(z)$. Тогда $\Phi(z) = F(z) - C$ также первообразная для функции $f(z)$, так как существует $\Phi'(z) = (F(z) - C)' = F'(z) = f(z)$.

Обратно, пусть $F(z)$ и $\Phi(z)$ — две первообразные одной и той же функции $f(z)$. Рассмотрим $w(z) = F(z) - \Phi(z)$. Тогда существует производная

$$w'(z) = F'(z) - \Phi'(z) = f(z) - f(z) = 0.$$

Если $w = u + iv$, то $w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, что равносильно $\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial v}{\partial x} = 0$, откуда согласно условиям Коши-Римана и $\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Поэтому по теореме из курса вещественного анализа функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ — постоянные в области D , так что $w = C$ ◁

Утверждение 3. В условиях теоремы 16.1 справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(z) dz = \Phi(b) - \Phi(a), \quad (3)$$

где $a, b \in D$, а $\Phi(z)$ — какая-то первообразная функции $f(z)$.

▷ Поскольку $F(z) = \int_a^z f(\zeta) d\zeta$ — первообразная для $f(z)$, то $\Phi(z) = F(z) + C$. Поэтому

$$\int_a^b f(z) dz = F(b) = \Phi(b) - C.$$

Но $\Phi(a) = F(a) + C = C$, откуда и получается (3) ◁

16.3. Примеры

Выше, в п. 5.1, 5.3 было показано, что правила дифференцирования и вид производных основных элементарных функций переносятся на комплексный случай. Соответственно сохраняется таблица первообразных. Поэтому аналогично в вещественном случае можно использовать для вычисления интегралов и формулу Ньютона-Лейбница (см. ниже пример 1), однако следует иметь в виду специфику, обусловленную неодносвязностью области (см. примеры 2, 3).

Заметим, что необходимыми условиями существования первообразной $F(z)$ для $f(z)$ в области D являются выполнение

равенства (1) и аналитичность $f(z)$ (последнее вытекает из требования аналитичности $F(z)$ и теоремы 15.2).

1. Вычислить интегралы а) $\int_0^1 e^{i\pi z} dz$; б) $\int_0^1 z^n dz$, $n \in \mathbb{N}$.

▷ Используя неопределённый интеграл, находим:

$$а) \int_0^1 e^{i\pi z} dz = -\frac{i}{\pi} e^{i\pi z} \Big|_0^1 = -\frac{i}{\pi} (e^{i\pi} - 1) = \frac{2i}{\pi};$$

$$б) \int_0^1 z^n dz = \frac{1}{n+1} z^{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \quad \triangleleft$$

2. Вычислить интеграл $\int_{\gamma} \frac{1}{\zeta} d\zeta$ по линии, соединяющей точки $\zeta = 1$ и $\zeta = z$, не проходящей через $\zeta = 0$.

▷ Функция $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$ аналитична в односвязной области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Рассмотрим два случая.

а) Кривая интегрирования γ_1 не обходит вокруг начала координат (рис. 60)⁹. Приняв для значений $\arg \zeta$ промежутки $(-\pi; \pi]$, рассмотрим плоскость $\mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной вещественной полуоси. В полученной односвязной области $f(\zeta)$ имеет первообразную $\ln \zeta$ (п. 10.2). Поэтому

$$\int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln \zeta \Big|_1^z = \ln z - \ln 1 = \ln z.$$

б) Кривая интегрирования γ_2 совершает n полных оборотов вокруг начала координат (рис. 61). Этот путь можно представить как совокупность некоторой кривой γ_1 и n замкнутых кривых, каждая из которых содержит внутри точку

⁹ Для разнообразия рассмотрена кривая с самопересечениями – результат интегрирования по ней такой же, как по пути, изображенному пунктиром.

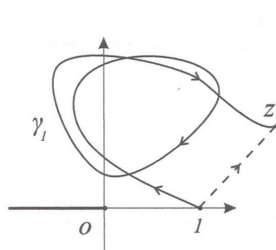


Рис. 60

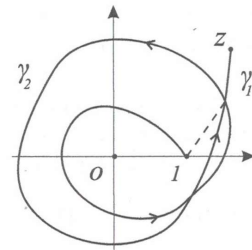


Рис. 61

$z = 0$ (в частности, на рис. 61 $n = 2$, а γ_1 состоит из пунктирной линии и части γ_2 от точки самопересечения до точки z). Учитывая результат примера 1 п. 13.3, получаем

$$\int_{\gamma_2} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi n i + \int_{\gamma_1} \frac{d\zeta}{\zeta} = 2\pi n i + \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z + 2\pi n i. \quad (4)$$

Поскольку функция $\ln z$ не является аналитической в односвязной области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (она там даже не непрерывна), в D не существует первообразной для $f(z) = \frac{1}{z}$ и формула Ньютона-Лейбница неприменима.

Отметим, что интеграл в (4) даёт различные значения функции $\text{Ln } z$ ◁

Замечание. Если z_0 и z_1 – соответственно начальная и конечная точки кривой интегрирования γ , не проходящей через начало координат, то

$$\int_{\gamma} \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z_1 - \ln z_0 + 2\pi n i, \quad (5)$$

где n – число полных оборотов вокруг начала координат при движении по γ , а знак n определяется направлением обхода.

3) Выяснить, существует ли первообразная функции $f(z)$ в указанной области D :

a) $f(z) = \bar{z}$, $D = \mathbb{C}$;

b) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, D – односвязная область, $z = 0 \notin D$;

c) $f(z) = \frac{1}{z^2}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

d) $f(z) = \sin(z^2)$, $D = \{1 < |z| < 2\}$.

▷ a) Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не аналитична, значит, она не имеет первообразной.

b) Функция $f(z) = \frac{1}{z^2}$ аналитична в односвязной области D , поэтому она имеет первообразную в D (см. утверждение 1). Это, например, $F(z) = -\frac{1}{z}$.

c) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2} = 0$, где γ – любой кусочно гладкий замкнутый контур в D . В случае, когда γ не обходит вокруг точки $z = 0$, этот факт следует из интегральной теоремы Коши. Для случая $0 \in \text{int } \gamma$ равенство было получено в п. 13.3. Стало быть, в соответствии с теоремой 16.1, $F(z) = -\frac{1}{z}$ – первообразная функции $f(z)$ в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

d) $f(z) = \sin(z^2) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$, следовательно, её интеграл по любому замкнутому контуру в $\mathbb{C}$ равен нулю. В частности, это справедливо и для произвольного контура, лежащего в неодносвязной области D , значит, первообразная существует (но, как известно, она не выражается в элементарных функциях).

16.4. Вопросы и задачи

1. Найдите первообразные в $\mathbb{C}$ для функций

a) $\cos az$; b) $\text{sh } az$; c) $e^z \sin az$; d) $z \sin(z^2)$;
e) $z^2 \text{ch } z$.

2. Выясните, имеет ли первообразную функция $f(z)$ в области D :

a) $f(z) = \ln z$, $D_1 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$; $D_2 = \mathbb{C} \setminus \{0\}$;

b) $f(z) = \frac{1}{z-1}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{1\}$;

c) $f(z) = \frac{1}{z-1} + \frac{1}{z}$, $D = \{0 < |z| < 1\}$;

d) $f(z) = \frac{1}{z-1} \pm \frac{1}{z+1}$, $D = \{|z| < 1\}$;

e) $f(z) = \frac{1}{z-1} \pm \frac{1}{z+1}$, $D = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$;

f) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$, $D_1 = \{|z| > 2\}$, $D_2 = \{0 < |z+i| < 2\}$;

g) $f(z) = \frac{z}{z^2+1}$, $D_1 = \{|z| > 2\}$, $D_2 = \{0 < |z+i| < 2\}$;

h) $f(z) = \frac{1}{z(z^2-1)}$, $D_1 = \{\text{Im } z > 0\}$;

$D_2 = \{\text{Re } z > 0\} \setminus \{1\}$, $D_3 = \{0 < |z| < 1\}$;

i) $f(z) = \frac{\bar{z}}{z}$, $D = \{|z| > 0\}$; j) $f(z) = z \text{Re } z$, $D = \mathbb{C}$.

3. Докажите равенство (5).

4. Пусть D – односвязная область, $0 \in D$, но $\pm i \notin D$.

Докажите, что в этой области $\text{arctg } z = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta^2} -$

первообразная для функции $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Глава 4

Ряды аналитических функций.

§17. Равномерно сходящиеся функциональные ряды

17.1. Основные понятия. Непрерывность и интегрируемость суммы ряда

Рассмотрим ряд, членами которого являются функции комплексного переменного:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z). \quad (1)$$

Функциональный ряд (1) *сходится в точке* $z_0 \in \mathbb{C}$, если сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z_0)$.

Множество E_0 всех таких точек называется *множеством сходимости* ряда (1). Говорят, что на E_0 функциональный ряд *сходится (поточечно)*. На множестве E_0 определена сумма ряда (1): $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$.

Пусть $E \subset E_0$. Ряд (1) *сходится к функции $f(z)$ равномерно на множестве E* , если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N \quad \forall z \in E: \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \epsilon.$$

Будем обозначать это так:

$$\sum_{k=1}^n f_k(z) \xrightarrow[E]{} f(z) \quad \text{или} \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \xrightarrow[E]{} f(z)$$

Утверждение 1. Пусть $\sum_{k=1}^n f_k(z) \xrightarrow[E]{} f(z)$, а функция $g(z)$

ограничена на множестве E . Тогда $\sum_{k=1}^n g(z) f_k(z) \xrightarrow[E]{} g(z) f(z)$.

▷ Пусть $|g(z)| \leq M \quad \forall z \in E$. Тогда, заменяя в формулировке определения ϵ на $\frac{\epsilon}{M}$ и используя равномерную сходимость ряда (1), получаем, что $\exists N: \forall n > N$ и $\forall z \in E$ справедливо

$$\left| g(z) f(z) - \sum_{k=1}^n g(z) f_k(z) \right| = |g(z)| \cdot \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| \leq M \frac{\epsilon}{M} = \epsilon \quad \triangleleft$$

Говорят, что функциональный ряд *сходится равномерно внутри области D* , если он сходится равномерно на любом компакте $G \subset D$. Обозначение: $\sum_{k=1}^n f_k(z) \xrightarrow[G \subset D]{} f(z)$.

Так же, как и в вещественном случае, формулируется и доказывается

Критерий Коши равномерной сходимости. Ряд (1) *равномерно сходится на множестве E тогда и только тогда, когда*

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists N, \forall n > N \quad \forall p \in \mathbb{N} \quad \forall z \in E: \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} f_k(z) \right| < \epsilon.$$

Как и в действительном случае, имеет место

Признак равномерной сходимости Вейерштрасса.

Пусть при каждом $n \geq n_0 \quad \forall z \in E$ справедлива оценка $|f_n(z)| \leq c_n$, а ряд $\sum_{n=n_0}^{\infty} c_n$ сходится. Тогда функциональ-

ный ряд (1) сходится абсолютно и равномерно на множестве E .

По аналогии с действительным случаем формулируется и доказывается

Теорема 17.1. Пусть $\forall n \quad f_n(z) \in C(D)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ сходится равномерно внутри области D . Тогда $f(z) \in C(D)$.

▷ Возьмём произвольную точку $z \in D$ и зафиксируем ее. Найдётся такой компакт $G \subset D$, что z – его внутренняя точка. Пусть $S_n(\zeta)$ – частичная сумма ряда (1). По условию $S_n \rightrightarrows f$, т.е. $\forall \epsilon > 0$ существует такой номер N , что $\forall n > N$,

$\forall \zeta \in G$ выполнено неравенство $|S_n(\zeta) - f(\zeta)| < \frac{\epsilon}{3}$.

Функция $S_n(\zeta)$ как сумма конечного числа непрерывных функций непрерывна на G , следовательно, равномерно непрерывна на этом множестве. Поэтому найдётся такое число δ , что $|S_n(\zeta) - S_n(z)| < \frac{\epsilon}{3}$, как только $|\zeta - z| < \delta$ ($\zeta, z \in G$). Таким образом,

$$|f(\zeta) - f(z)| = |(f(\zeta) - S_n(\zeta)) - (f(z) - S_n(z)) + (S_n(\zeta) - S_n(z))| \leq$$

$$|f(\zeta) - S_n(\zeta)| + |f(z) - S_n(z)| + |S_n(\zeta) - S_n(z)| < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$$

при $|\zeta - z| < \delta$, что и означает непрерывность f в произвольной выбранной точке $z \in D$, т.е. $f \in C(D)$ ◁

Теорема 17.2. Пусть γ – кусочно гладкая кривая, принадлежащая некоторой области D , и пусть $\forall n \quad f_n(z) \in C(D)$, а $\sum_{k=1}^n f_k(z) \rightrightarrows f(z)$. Тогда сумма $f(z)$ этого ряда интегрируема на γ , причём

$$\int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\gamma} f_n(z) dz. \quad (2)$$

▷ Заметим, что все интегралы в (2) существуют, так как $f_n(z) \in C(D)$ по условию, а $f(z) \in C(D)$ в силу теоремы 17.1. Пусть L – длина γ . Из условия равномерной сходимости ряда внутри области D следует, что $\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n > N \forall z \in \gamma$ выполнено неравенство $\left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| < \frac{\epsilon}{L}$. Тогда

$$\left| \int_{\gamma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z) \right) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_{\gamma} f_k(z) dz \right| = \left| \int_{\gamma} \left(f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right) dz \right| \leq$$

$$\leq \int_{\gamma} \left| f(z) - \sum_{k=1}^n f_k(z) \right| ds \leq \frac{\epsilon}{L} \cdot \int_{\gamma} ds = \epsilon \quad \triangleleft$$

Замечание. Утверждение теоремы остаётся верным, если ряд (1) равномерно сходится на γ .

17.2. Первая теорема Вейерштрасса

Теорема 17.3. Пусть $\forall n \quad f_n(z) \in A(D)$ и функциональный ряд (1) равномерно сходится внутри D . Тогда

1) сумма ряда $f(z) \in A(D)$;

2) $\forall k \in \mathbb{N} \quad \forall z \in D \quad f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z)$.

▷ 1) Зафиксируем произвольную точку $z \in D$ и рассмотрим такую окрестность $U(z)$, что $\overline{U(z)} \subset D$. Возьмём замкнутый контур $\gamma \subset U(z)$ (см. рис. 62). Поскольку $\overline{U(z)}$ – компакт, то в силу теоремы 17.1 функция $f(z) \in C(\overline{U(z)})$.

А в соответствии с теоремой 17.2

$$\oint_{\gamma} f(\zeta) d\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \oint_{\gamma} f_n(\zeta) d\zeta = 0$$

(все интегралы под знаком последней суммы равны нулю вследствие теоремы Коши 13.1, так как $f_n(z) \in \mathcal{A}(D)$).

Таким образом, по теореме Морера получаем аналитичность $f(z)$ в окрестности произвольной точки z , т.е. аналитичность $f(z)$ в области D .

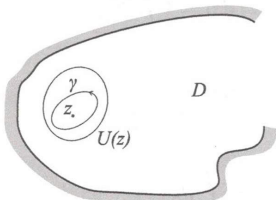


Рис. 62

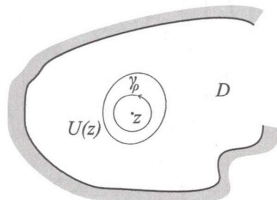


Рис. 63

2) Для произвольно выбранной точки $z \in D$ и такой окрестности $U(z)$, что $\overline{U(z)} \subset D$, найдется окружность $\gamma_\rho = \{\zeta : |\zeta - z| = \rho\}$, целиком попадающая в $U(z)$ (рис. 63).

При $k \in \mathbb{N}$ для аналитической по доказанному в п. 1) функции $f(z)$ выполнено равенство (см. теорему 15.2):

$$f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta = \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}}. \quad (3)$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta)$ сходится равномерно на $\overline{U(z)}$. Так как для

$\zeta \in \gamma_\rho$ справедливо равенство $\left| \frac{1}{(\zeta - z)^{k+1}} \right| = \frac{1}{\rho^{k+1}}$, согласно

утверждению 1 ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}}$ равномерно сходится на компакте γ_ρ . Значит, он допускает почленное интегрирование (см. теорему 17.2), так что

$$\begin{aligned} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(\zeta) \right) \frac{d\zeta}{(\zeta - z)^{k+1}} &= \\ = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{k!}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f_n(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z). \end{aligned}$$

Последнее равенство обеспечено теоремой 15.2, поскольку $f_n(z) \in \mathcal{A}(D)$. Таким образом, в произвольной точке $z \in D$ имеем равенство (см. (3)): $f^{(k)}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n^{(k)}(z) < \infty$

Замечание. Можно показать, что в условиях теоремы ряд из производных равномерно сходится внутри D к своей сумме $f^{(k)}(z)$.

17.3. Вопросы и задачи

1. Известно, что функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится внутри области D . Верно ли, что этот ряд равномерно сходится на D ?
2. Пусть $f_n(z) \in C(\overline{D}) \forall n$, где $\overline{D} = \{|z| \leq R\}$, $R > 0$, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на любом строго внутреннем компакте $G \subset D$. Можно ли утверждать, что сумма ряда $f(z) \in C(\overline{D})$?
3. Докажите признак Вейерштрасса равномерной сходимости функционального ряда.

4. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ равномерно сходится в интервале $(-1; 0)$ действительной оси, в то время, как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{z^n}{n} \right|$ в этом интервале сходится, но неравномерно.
5. Найдите множество сходимости и множество равномерной сходимости рядов а) $\sum_{n=1}^{\infty} (\bar{z})^n$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 z}$.
6. Покажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n^2}$ равномерно сходится на вещественной прямой $\mathbf{R}$, но расходится, если $z \notin \mathbf{R}$.
7. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nz}{n 3^n}$ удовлетворяет условиям первой теоремы Вейерштрасса при $|\operatorname{Im} z| < 1$. Найдите $f'(0)$, где $f(z)$ – сумма данного ряда.

§18. Степенные ряды. Ряд Тейлора

18.1. Множество сходимости степенного ряда

Определение. Функциональный ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbf{C}, \quad (1)$$

называется *степенным рядом*. Числа c_n – это *коэффициенты* степенного ряда.

Теорема 18.1 (Коши-Адамар). Если $l = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то

- а) при $l = 0$ ряд (1) абсолютно сходится во всей комплексной плоскости;
- б) при $l = +\infty$ ряд (1) сходится лишь в точке z_0 ;

в) при $0 < l < +\infty$ ряд (1) абсолютно сходится внутри круга $|z - z_0| < R$, где $R = \frac{1}{l}$, и расходится во внешности этого круга, т.е. при $|z - z_0| > R$.

▷ Доказательство проводится так же, как в действительном случае ◁

Определения. Число R – *радиус сходимости* степенного ряда. По определению: $R = 0$ при $l = +\infty$; $R = +\infty$ при $l = 0$.

Множество $K_R = \{z : |z - z_0| < R\}$, где $R > 0$ – радиус сходимости, называется *кругом сходимости* степенного ряда.

Формула для вычисления радиуса сходимости

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \quad (2)$$

называется *формулой Коши-Адамара*.

Замечание. Если существует предел $\tilde{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$, (3)

то $\tilde{R} = R$.

Примеры.

1. Найти радиус сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+i}{(2+i)^n} (z-i)^n$; выяснить, сходится ли ряд в точках $z_{1,2} = \pm 3i$, $z_3 = 2$.

▷ Используя формулу Коши-Адамара, вычислим радиус сходимости:

$$\frac{1}{R} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n+i}{(2+i)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{|n+i|}}{|2+i|} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$

откуда $R = \sqrt{5}$, следовательно, имеем круг сходимости $|z - i| < \sqrt{5}$.

Точка $z_1 = 3i$ лежит внутри круга сходимости, так как $|z_1 - i| = |2i| = 2 < R$, значит в этой точке данный ряд абсолютно сходится.

Напротив, точка $z_2 = -3i$ находится вне круга сходимости, потому что $|z_2 - i| = |-4i| = 4 > R$, следовательно, в этой точке ряд расходится.

Наконец, при $z_3 = 2$ имеем $|z_3 - i| = |2 - i| = R$, так что выяснение сходимости ряда производится непосредственными вычислениями. В результате получается расходящийся числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+i}{(2+i)^n} (2-i)^n$, для него не выполняется необходимое условие сходимости, так как при $n \rightarrow \infty$

$$\left| \frac{n+i}{(2+i)^n} \right| |2-i|^n = \frac{|n+i|}{|2+i|^n} |2-i|^n = |n+i| \rightarrow \infty \quad \triangleleft$$

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^p}$ (p — действительное число).

▷ Здесь $z_0 = 0$, $c_n = \frac{1}{n^p}$. Радиус сходимости найдём по формуле (3):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^p = 1$$

при любом p . Поэтому при $|z| < 1$ ряд сходится, при $|z| > 1$ — расходится.

Исследуем сходимость ряда в точках окружности $|z| = 1$. Так как для общего члена ряда имеем $\left| \frac{z^n}{n^p} \right| = \frac{|z|^n}{n^p} = \frac{1}{n^p}$, то при $p > 1$ ряд сходится абсолютно. Если же $p \leq 0$, общий член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, следовательно, ряд расходится.

Пусть $0 < p \leq 1$. Поскольку $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi)$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\varphi}}{n^p} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n^p} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\varphi}{n^p}. \quad (4)$$

Оба вещественных ряда в правой части (4) сходятся по признаку Дирихле-Абеля, если $\varphi \neq 0$ (докажите!).

При $\varphi = 0$, т.е. в точке $z = 1$, ряд (4) расходится, так как расходится первый из рядов в правой части (4).

Итак, множество сходимости данного ряда — открытый круг $|z| < 1$ при $p \leq 0$; замкнутый круг $|z| \leq 1$ при $p > 1$; тот же замкнутый круг за исключением точки $z = 1$ при $0 < p \leq 1$ $\triangleleft$

18.2. Равномерная сходимость степенного ряда и ее следствия

Теорема 18.2 (Абель). Пусть степенной ряд (1) сходится в точке $z_1 \neq z_0$. Тогда (1) сходится абсолютно в любой такой точке z , что $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, и сходится равномерно в любом замкнутом круге $\bar{K}_\rho = \{z : |z - z_0| \leq \rho\}$, где $0 < \rho < |z_1 - z_0|$.

▷ Из условия следует, что z_1 лежит либо внутри, либо на границе круга сходимости ряда (1). В любом случае точка z , для которой $|z - z_0| < |z_1 - z_0|$, принадлежит кругу сходимости, поэтому по теореме 18.1 ряд (1) абсолютно сходится в точке z .

Пусть число z отвечает неравенству $|z - z_0| \leq \rho < |z_1 - z_0|$. Тогда $\left| \frac{z - z_0}{z_1 - z_0} \right| \leq \frac{\rho}{|z_1 - z_0|} \equiv q < 1$. Рассмотрим

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z_1 - z_0)^n \cdot \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n}.$$

Из необходимого условия сходимости ряда (1) в точке z_1 следует, что найдется такой номер N , что $|c_n (z_1 - z_0)^n| < 1$

при всех $n > N$. Поэтому $\forall z: |z - z_0| \leq \rho$ получаем

$$|c_n(z - z_0)^n| = |c_n(z_1 - z_0)^n| \cdot \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| < \left| \frac{(z - z_0)^n}{(z_1 - z_0)^n} \right| \leq q^n.$$

Отсюда по признаку Вейерштрасса следует равномерная сходимость (1) в круге $\overline{K_\rho}$ $\triangleleft$

Замечание. Вторая часть теоремы Абеля утверждает равномерную сходимость степенного ряда *внутри круга* K_R .

Используя утверждение теоремы 18.2 о равномерной сходимости и результаты §17, получаем ряд следствий.

Следствие 1. Сумма степенного ряда является аналитической функцией в круге сходимости.

Следствие 2. Степенной ряд можно почленно интегрировать на любой кусочно гладкой кривой, лежащей в круге сходимости.

Следствие 3. Внутри круга сходимости степенной ряд можно дифференцировать почленно любое число раз. При этом получающиеся ряды имеют тот же радиус сходимости, что исходный.

$\triangleright$ Действительно, возможность k -кратного почленного дифференцирования вытекает из теоремы 17.3.

Далее достаточно рассмотреть первую производную суммы степенного ряда с радиусом сходимости R :

$$\begin{aligned} f'(z) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z - z_0)^n. \end{aligned}$$

Радиус сходимости R' этого ряда

$$R' = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|(n+1)c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{n+1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt[n+1]{|c_{n+1}|} \right)^{\frac{n+1}{n}} = R \quad \triangleleft$$

Следствие 4. Пусть $f(z)$ — сумма ряда (1). Тогда коэффициенты ряда (1) имеют вид

$$c_0 = f(z_0), \quad c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad \text{где } n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

$$\triangleright \text{ Так как } f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{то } f(z_0) = c_0.$$

Из равенства $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1}$ после подстановки $z = z_0$ получаем $c_1 = f'(z_0)$.

В общем случае

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k},$$

$$\text{откуда следует } c_k = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \quad \triangleleft$$

Определение. Степенной ряд, коэффициенты которого выражаются формулами (5), называется *рядом Тейлора* функции $f(z)$.

Таким образом, следствие 4 означает, что всякий степенной ряд с $R > 0$ является рядом Тейлора для своей суммы.

Следствие 5. Если два степенных ряда в некотором круге $|z - z_0| < R$ имеют одну и ту же сумму, их коэффициенты (а значит и сами ряды) совпадают.

18.3 Теорема Тейлора

Теорема 18.3. Пусть $f(z)$ — аналитическая функция внутри круга $K_R = \{z: |z - z_0| < R\}$, $R > 0$. Тогда $f(z)$ однозначно представляется сходящимся внутри K_R степенным рядом $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$.

▷ Возьмём произвольную точку $z \in K_R$ и рассмотрим такую окружность $\gamma_\rho: |\zeta - z_0| = \rho$, что $0 < \rho < R$, $z \in \text{int } \gamma_\rho$ (рис. 64). Так как $f \in \mathcal{A}(K_R)$, то по формуле Коши

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (6)$$

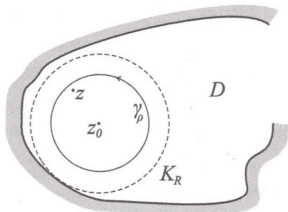


Рис. 64

Проведём преобразования, используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n. \quad (7)$$

Так как $\zeta \in \gamma_\rho$, то $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \frac{|z - z_0|}{\rho} \equiv q < 1$, следовательно, ряд в (7) сходится равномерно относительно $\zeta \in \gamma_\rho$. Подставляя (7) в (6) и интегрируя почленно, получаем

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$

Отметим, что в формуле для c_n вместо γ_ρ можно взять любой кусочно гладкий замкнутый контур γ , лежащий внутри K_R и содержащий внутри себя точку z_0 .

Итак, искомое представление получено. Поскольку z — произвольная точка K_R , утверждение о разложимости $f(z)$ в степенной ряд доказано.

Согласно следствию 4, полученный степенной ряд является рядом Тейлора. Следствие 5 утверждает единственность разложения $\triangleleft$

Замечания. 1) Вид полученных коэффициентов согласуется с (5) из следствия 4:
$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta =$$

$$= \frac{1}{n!} \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

2) Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, тогда при разложении этой функции в степенной ряд в окрестности точки $z_0 \in D$ получается ряд Тейлора с радиусом сходимости $R \geq \rho(z_0, \partial D)$.

18.4. Разложение функций в степенные ряды

Основные приёмы разложения функций в степенные ряды — те же самые, что были изложены в курсе математического анализа. Отметим некоторые из них.

1) Использование формулы для коэффициентов ряда Тейлора (5). Заметим, в частности, что таким способом получают известные представления основных элементарных функций, а именно:

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!};$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\operatorname{ch} z = 1 + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!};$$

$$\operatorname{sh} z = z + \frac{z^3}{3!} + \dots + \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!};$$

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Первые пять рядов сходятся во всей плоскости, последний ряд имеет радиус сходимости $R = 1$.

2) Использование основных разложений.

3) Применение почленного дифференцирования или интегрирования степенных рядов.

Примеры

а) Найти разложение в ряд по степеням z функции $f(z) = \ln(1+z)$, где символ $\ln$ используется для обозначения главной однозначной ветви логарифма, $\arg z \in (-\pi; \pi]$.

▷ Так как $f(z) \in \mathcal{A}(|z| < 1)$, согласно теореме 18.3 искомого разложение имеет место внутри единичного круга (в точке $z = -1$ нарушается аналитичность f). Заметим, что $f'(z) = \frac{1}{1+z}$, $f(0) = 0$, поэтому

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z) - f(0) = \int_0^z \frac{d\zeta}{1+\zeta} = \int_0^z \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \zeta^n \right) d\zeta = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \int_0^z \zeta^n d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} \zeta^{n+1} \Big|_0^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}. \end{aligned}$$

Таким образом, для $|z| < 1$ получена формула $\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$, имеющая вид, уже известный из курса вещественного анализа ◁

б) Найти разложение в ряд по степеням $(z-1)$ функции $f(z) = \frac{1}{(2+z)^2}$.

▷ $f(z) \in \mathcal{A}(|z-1| < 3)$, поэтому существует степенной ряд, сходящийся внутри круга радиуса $R = 3$ с центром в точке $z_0 = 1$. Поскольку $f(z) = \left(-\frac{1}{2+z}\right)'$, найдём сначала разложение функции

$$\frac{1}{2+z} = \frac{1}{3+(z-1)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z-1}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n.$$

Тогда

$$\begin{aligned} f(z) &= - \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z-1)^n \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{3^{n+1}} (z-1)^{n-1} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)}{3^{n+2}} (z-1)^n, \quad |z-1| < 3 \quad \triangleleft \end{aligned}$$

18.5. Вопросы и задачи

1. Для данного степенного ряда найдите радиус и круг сходимости; выясните, сходится ли этот ряд в указанных точках z_1, z_2 , если

$$а) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+i}{3^n \cdot n^3} (z-1+i)^n; \quad z_1 = -2i; \quad z_2 = 1+2i;$$

$$б) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 i^n}{n^2 + n - 1} (z-i)^n; \quad z_1 = -2i; \quad z_2 = 1+i.$$

2. Может ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} c_n (z+i)^n$ расходиться в точке

$z = -2 - i$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} (z+i)^n$ — сходиться в точке $z = 1 + i$ (в обоих случаях $\{c_n\}$ — одно и то же множество чисел)?

3. Найдите круг сходимости для каждого из следующих рядов:

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n} (z+i)^n$; b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z+2)^n}{n^n}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n}$;

d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} z^{3n}$; e) $\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n$; f) $\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^{n^2}$, где $a \in \mathbb{C}$.

4. Найдите радиус сходимости и исследуйте поведение на границе круга сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n} z^n$.

5. Радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ равен $R \in (0; +\infty)$.

Найдите радиусы сходимости рядов a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n!} (z+1)^n$;

b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^k c_n z^n$, $k \in \mathbb{Z}$; c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3^n + 2i) c_n}{n} z^n$.

6. Пусть $f(z)$ — аналитическая в некоторой окрестности точки $z_0 = 0$ четная (нечетная) функция. Докажите, что ее разложение в ряд по степеням z содержит только члены с четными (нечетными) степенями.

7. Разложите в степенной ряд в окрестности точки $z_0 = 0$ следующие функции; укажите радиус сходимости ряда:

a) $\sin^2 z$; b) $\operatorname{ch}^2 z$; c) $\frac{1}{az+b}$ ($b \neq 0$); d) $\frac{z}{(z-1)^2}$;

e) $\frac{z}{z^2+5z+4}$; f) $\frac{z^2}{(1-z^3)^2}$; g) $e^z \cos z$.

8. Следующие функции разложите в ряд по степеням $(z-1)$; укажите радиус сходимости полученного ряда:

a) $\sin z$; b) $\frac{z}{z^2+5z+4}$; c) e^{2iz} .

9. Функцию $f(z) = \frac{z^2+5}{(z^2-4)(2z^2+1)}$ разложите в степенной ряд в окрестности точки a) $z_0 = 0$; b) $z_0 = \infty$.

10. Объясните, почему бесконечно дифференцируемая в окрестности точки $x_0 = 0$ действительной прямой функция

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

не может быть разложена в ряд

Маклорена. Можно ли функцию $f(z) = e^{-\frac{1}{z^2}}$ разложить в ряд Тейлора по степеням $(z+1)$?

11. Можно ли ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2z-i)^n}{n^3}$

a) почленно интегрировать на кривой $|z| = \frac{1}{3}$;

b) дифференцировать в круге $D = \left\{ z : \left| z - \frac{i}{3} \right| < \frac{1}{5} \right\}$;

в) дважды почленно дифференцировать в круге D ?

12. Пусть $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ — целая функция. Верно ли, что

$$\overline{f(\overline{z})} - \text{тоже целая функция? Когда } f(z) = \overline{f(\overline{z})}?$$

13. Найдите сумму степенного ряда:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}; \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n} (z-1)^n; \quad c) \sum_{n=1}^{\infty} n^2 z^n.$$

§19. Единственность определения аналитической функции

19.1. Нули аналитической функции

Определение. Точка z_0 , где $f(z_0) = 0$, называется нулем функции $f(z)$.

Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$, точка $z_0 \in D$ — нуль $f(z)$. Тогда по теореме Тейлора в некоторой окрестности z_0

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad \text{где } c_0 = 0. \quad (1)$$

Определение. Аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка k , если в ее разложении (1) $c_0 = c_1 = \dots = c_{k-1} = 0$, но $c_k \neq 0$.

Утверждение. Аналитическая функция $f(z)$ имеет в точке z_0 нуль порядка k тогда и только тогда, когда выполнено любое из двух нижеследующих условий:

- 1) $f(z_0) = f'(z_0) = \dots = f^{(k-1)}(z_0) = 0$, но $f^{(k)}(z_0) \neq 0$;
- 2) $f(z) = (z - z_0)^k \cdot \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 , $\varphi(z_0) \neq 0$.

▷ 1) Утверждение следует из определения и формулы для коэффициентов Тейлора: $c_0 = f(z_0)$, $c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$.

2) Из равенства (1) получаем

$$f(z) = (z - z_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} c_{n+k} (z - z_0)^n = (z - z_0)^k \cdot \varphi(z), \quad (2)$$

где через $\varphi(z)$ обозначена сумма ряда. Эта функция является аналитической в некоторой окрестности z_0 (см. п. 18.2), причем $\varphi(z_0) = c_k \neq 0$ <

Примеры

Определить порядок нуля функции $f(z)$ в точке z_0 , если

a) $f(z) = 1 - \cos z$, $z_0 = 2\pi$;

b) $f(z) = e^{-z^2} - \cos(z\sqrt{2})$, $z_0 = 0$.

▷ a) $f(2\pi) = f'(2\pi) = 0$, но $f''(2\pi) = 1 \neq 0$, следовательно, $z_0 = 2\pi$ — нуль второго порядка $f(z)$.

b) В окрестности точки $z_0 = 0$ выпишем первые члены разложения в степенной ряд:

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 - z^2 + \frac{1}{2} z^4 - 1 + \frac{1}{2} (z\sqrt{2})^2 - \frac{1}{4!} (z\sqrt{2})^4 + O(z^6) = \\ &= \frac{1}{3} z^4 + O(z^6) = z^4 \left(\frac{1}{3} + cz^2 + \dots \right), \end{aligned}$$

значит, $z_0 = 0$ — нуль четвертого порядка $f(z)$ <

19.2. Основная теорема и ее следствия

Теорема 19.1. Пусть $f(z)$ — аналитическая в области D функция, $f(z) = 0 \quad \forall z \in D_0 \subset D$, причём D_0 имеет хотя бы одну предельную точку в D . Тогда $f(z) \equiv 0$ в D .

▷ Пусть $a \in D$ — предельная точка D_0 . Разложим $f(z)$ в степенной ряд в окрестности $K_0 = \{z : |z - a| < R_0\}$ этой точки:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n. \quad (3)$$

По условию существует такая последовательность $\{z_n\} \subset D_0 \cap K_0$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$, $z_n \neq a$.

Так как $f(z)$ непрерывна в точке $z = a$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} f(z_n) = f(a) = 0$. Поэтому коэффициент $c_0 = f(a) = 0$ и ряд (3) принимает вид

$$f(z) = (z - a) \cdot (c_1 + c_2(z - a) + \dots) = (z - a) \varphi_1(z),$$

где $\varphi_1(z) \in \mathcal{A}(K_0)$. Так как $z_n \neq a$, то $\varphi_1(z_n) = 0 \quad \forall n$.

Повторяя рассуждения для функции $\varphi_1(z)$, получаем $\varphi_1(a) = 0$, откуда $c_1 = \varphi_1(a) = 0$, т.е.

$$f(z) = (z-a)^2 \cdot (c_2 + c_3(z-a) + \dots) = (z-a)^2 \varphi_2(z),$$

где $\varphi_2(z) \in \mathcal{A}(K_0)$ и $\varphi_2(z_n) = 0 \quad \forall n$ и т.д.

Следовательно, в (3) все коэффициенты $c_n = 0$, значит, $f(z) \equiv 0$ в K_0 .

Покажем теперь, что $f(z) \equiv 0$ в D . Пусть z^* – произвольная точка области D . Существует непрерывная кривая $\gamma \subset D$, соединяющая точки a и z^* . Пусть $\rho(\gamma, \partial D) = d > 0$ (∂D – граница D).

Рассмотрим открытое покрытие компакта γ кругами с центрами на кривой и с радиусами $d/3$. По лемме Гейне-Бореля существует конечное число таких кругов, также покрывающих γ . Тогда, взяв для первых двух кругов a_1 – точку пересечения границы K_0 с γ , в общей их части можно найти последовательность нулей функции $f(z)$, сходящуюся к a_1 . Соседние круги имеют непустое пересечение, поэтому, переходя из круга в круг и повторяя предыдущие рассуждения, приходим к заключению, что $f(z) \equiv 0$ в каждом следующем круге.

Продолжая описанный процесс, получаем конечное число кругов $K_0, K_1, \dots, K_m$ с центрами на γ , причём $z^* \in K_m$. Поскольку $f(z) \equiv 0$ в K_m , то $f(z^*) = 0$. Так как точка z^* была взята произвольно, $f(z) \equiv 0$ в D $\triangleleft$

Следствие 1. Пусть $f(z)$ – не равная тождественно нулю аналитическая в области D функция, а E – ограниченная и замкнутая подобласть D . Тогда $f(z)$ может иметь в E лишь конечное число нулей.

$\triangleright$ В самом деле, если $f(z)$ имеет в E бесконечное множество нулей, то это множество имеет хотя бы одну предельную точку в D (так как E – ограниченное замкнутое множество). Поэтому $f(z) \equiv 0$ в D , что противоречит условию $\triangleleft$

Следствие 2. Не равная тождественно нулю целая функция $f(z)$ может иметь не более чем счётное число нулей в $\mathbb{C}$, причём если нулей бесконечно много, то $z = \infty$ – предельная точка этого множества нулей.

$\triangleright$ Для доказательства достаточно рассмотреть последовательность замкнутых кругов $|z| \leq n$, при $n \rightarrow \infty$ заполняющих плоскость, и применить следствие 1 $\triangleleft$

Теорема 19.2 (теорема единственности). Существует не более одной функции, однозначной и аналитической в области D , принимающей заданные значения на некотором множестве D_0 , имеющем хотя бы одну предельную точку в D .

$\triangleright$ Заметим, во-первых, что такая аналитическая функция может не существовать. Если же она существует, то она единственна. В самом деле, пусть заданные значения на множестве D_0 принимают две аналитические в D функции: $f_1(z)$ и $f_2(z)$. Тогда для доказательства следует рассмотреть функцию $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$ и применить теорему 19.1 $\triangleleft$

Примеры

1. Найти все аналитические в $\mathbb{C}$ функции, удовлетворяющие равенствам
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$\triangleright$ Данному условию отвечает аналитическая в $\mathbb{C}$ функция $f(z) = z^2$. Множество точек вида $\left\{z_n = \pm \frac{1}{n}\right\}$ имеет предельную точку $z = 0$, поэтому по теореме 19.2 найденная функция единственна $\triangleleft$

2. Существует ли аналитическая в круге $K = \{|z| < 2\}$ функция $f(z)$, для которой при $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие

$$a) \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}; \quad b) \quad f\left(\frac{n}{2n-1}\right) = \frac{n-1}{5n-2}?$$

▷ а) Выбрав множество $D_0 = \left\{ z_n = \frac{1}{n} \right\}$, имеющее в K предельную точку $z = 0$, можно указать $f \in \mathcal{A}(K)$, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}$. Это $f(z) = z$. Но тогда $f\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}$. В силу единственности определения $f(z)$ по значениям на D_0 аналитической в K функции с заданным условием не существует.

б) Последовательность точек $\left\{ \frac{n}{2n-1} \right\}$, сходящаяся к $z_0 = \frac{1}{2} \in K$, образует множество D_0 . Поэтому, если искомая функция существует, она единственна. Используя уравнение

$$z = \frac{n}{2n-1} \Leftrightarrow n = \frac{z}{2z-1},$$

находим ответ: $f(z) = \frac{1-z}{z+2} \quad \triangleleft$

3. Найти такую целую функцию $f(z)$, чтобы $\forall n \in \mathbb{Z} \quad f(n) = 0$.

▷ Множество целых чисел $\mathbb{Z} \subset \mathbb{C}$ имеет одну предельную точку $z_0 = \infty$. Но $z_0 \notin \mathbb{C}$, поэтому теорема единственности в данном случае не имеет места. И действительно, существует бесконечно много целых функций, удовлетворяющих условию $f(n) = 0$. Это, например,

$$f(z) = 0; \quad f(z) = 2 \sin \pi z; \quad f(z) = \sin 2\pi z; \quad f(z) = \sin^2 \pi z$$

и т.д. $\triangleleft$

4. Теорема единственности позволяет распространить на комплексную плоскость соотношения между функциями, известные на действительной прямой.

▷ Так, например, для $x \in \mathbb{R}$ имеет место равенство $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Рассмотрим две целые (т.е. аналитические в $\mathbb{C}$) функции $f(z) = \sin^2 z + \cos^2 z$ и $g(z) = 1$. Поскольку

$f(z) = g(z)$ при $z \in \mathbb{R}$, то в силу теоремы 19.2 $\forall z \in \mathbb{C}$ $f(z) = g(z)$, т.е. $\sin^2 z + \cos^2 z \equiv 1 \quad \triangleleft$

Аналогичным образом на комплексный случай переносятся и другие формулы элементарной тригонометрии.

19.3. Вопросы и задачи

- Найдите порядок нуля z_0 для функции $f(z)$, если
 - $f(z) = z^2(1 - \cos 2z)$, $z_0 = 0$;
 - $f(z) = z \sin^3 2z$, $z_0 = 0$; $z_0 = -\pi$;
 - $f(z) = \frac{\sin^3 2z}{z^2}$, $z_0 = 0$; $z_0 = \pi$;
 - $f(z) = e^{\sin z} - e^{\lg z}$, $z_0 = 0$;
 - $f(z) = (z^2 + \pi^2)(e^z + 1)^2$, $z_0 = \pi i$; $z_0 = 3\pi i$.
- Пусть точка z_0 — нуль порядка k функции $f(z)$. Чем точка z_0 является для функции $f^{(m)}(z)$ ($0 < m < k$)?
- Пусть точка z_0 — нуль порядка k функции $f(z)$ и одновременно нуль порядка m ($m < k$) функции $g(z)$. Чем она является для функций
 - $f(z) \pm g(z)$;
 - $f(z) \cdot g(z)$;
 - $\frac{f(z)}{g(z)}$?
- Не равная тождественно нулю функция $f(z) = \sin \frac{1}{z}$, аналитическая в круге $K = \{|z - 1| < 1\}$, имеет в K бесконечное множество нулей. Почему это не противоречит теореме единственности?
- Докажите, что всякий нуль $z_0 \neq \infty$ не равной нулю тождественно функции $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ изолирован, т.е. найдётся окрестность z_0 , в которой нет других нулей $f(z)$.
- Докажите, что периодическая функция, аналитическая в некоторой области D , $z = \infty \in D$, — константа.

7. Докажите, что уравнение $f(z) = f(2z)$ не имеет отличных от константы решений, аналитических в некоторой области, содержащей точку $z = 0$.

8. Существует ли $f(z) \in \mathcal{A}\{|z| < 1\}$, для которой выполнены условия (везде $n \in \mathbb{N}$):

$$a) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^4}; \quad b) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^3};$$

$$c) f\left(\frac{1}{2n}\right) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2n-1}\right) = 1;$$

$$d) f\left(\frac{n}{2n+1}\right) = \frac{1}{2n+1}; \quad e) f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos n\pi + \frac{2}{n};$$

$$f) f\left(\frac{1}{n+1}\right) = e^{-\frac{1}{n}}; \quad g) f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}.$$

9. Используя теорему единственности, докажите справедливость в $\mathbb{C}$ следующих равенств:

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z; \quad \sin 2z = 2 \cos z \sin z;$$

$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1; \quad e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2}.$$

§20. Понятие аналитического продолжения

20.1. Аналитическое продолжение с множества, в частности, с действительной прямой

Задача аналитического продолжения данной функции заключается в распространении её на возможно более широкую область определения с сохранением аналитичности. Существует несколько подходов к решению этой проблемы.

Определение. Пусть некоторая однозначная функция $f(z)$ задана на множестве D_0 , а функция $F(z)$ определена и аналитична в области D , $D_0 \subset D$, причём $f(z) = F(z)$ при $z \in D_0$. Тогда $F(z)$ называется *аналитическим продолжением функции $f(z)$ с множества D_0 на D* .

Следующее утверждение является переформулировкой теоремы 19.2.

Теорема 20.1. Пусть функция $f(z)$ определена на множестве $D_0 \subset D$, имеющем хотя бы одну предельную точку в D . Тогда, если существует аналитическое продолжение $f(z)$ с D_0 на область D : $F(z) \in \mathcal{A}(D)$, то оно единственно.

Заметим, что в качестве множества D_0 может выступать некоторая кривая Γ , в частности, интервал вещественной прямой. Значениями на Γ аналитическая функция $F(z)$ определяется однозначно (если она существует). Так получается *аналитическое продолжение $f(z)$ в D с кривой Γ* .

Ниже приведены примеры продолжения с действительной оси (см. также пример 4 п. 19.2).

Примеры

1. $\triangleright$ Пусть $D = \mathbb{C}$, $D_0 = \mathbb{R}$ — действительная ось. Рассмотрим функцию $F(z) = \frac{1}{2i} (e^{iz} - e^{-iz}) \in \mathcal{A}(\mathbb{C})$ и определённую на $\mathbb{R}$ функцию $f(x) = \sin x$. По формуле Эйлера $\sin x = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$, следовательно, $F(z)$ — аналитическое продолжение $f(x)$ с вещественной прямой в комплексную плоскость. В силу единственности этого продолжения естественно сохранить для $F(z)$ обозначение $\sin z$. $\triangleleft$

Аналогичным образом приходим к целым функциям e^z , $\cos z$, $\operatorname{ch} z$, $\operatorname{sh} z$, которые являются аналитическим продолжением соответствующих вещественных.

2. $\triangleright$ Из курса вещественного анализа известно представление $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$ при $|x| < 1$. Отсюда

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (x-1)^n, \quad 0 < x < 2.$$

Степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n$ имеет радиус сходимости $R = 1$, поэтому его сумма аналитична в круге $\mathcal{K} = \{|z-1| < 1\}$. Значит, по теореме 20.1 ($D = \mathcal{K}$, $D_0 = (0; 2)$) аналитическим продолжением функции $\ln x$ с вещественного интервала в круг $\mathcal{K}$ является сумма этого ряда, которую мы обозначим $\ln z$ (см. также пример а) п. 18.4) $\triangleleft$

3. $\triangleright$ При $x > 0$ справедливо равенство $\ln x = \int_1^x \frac{d\zeta}{\zeta}$.

В примере 2а) п. 16.3 показано, что функция $\frac{1}{z}$ в плоскости $\mathbb{C}$ с разрезом по отрицательной вещественной полуоси имеет первообразную $\ln z = \ln|z| + i \arg z$ (здесь $\arg z \in (-\pi; \pi)$).

Таким образом, $\ln z = \int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}$, где интегрирование идёт по любому пути в области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Поскольку $\ln z \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-)$, эта функция является аналитическим продолжением $\ln x$ с вещественной положительной полуоси.

Заметим, что по теореме единственности данное продолжение совпадает в круге $\mathcal{K} = \{|z-1| < 1\}$ с суммой ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} (z-1)^n \quad (\text{см. выше}) \triangleleft$$

20.2. Непосредственное аналитическое продолжение. Многозначные функции

Рассмотрим две области D_1 и D_2 комплексной плоскости, имеющие непустое пересечение D_{12} . Пусть однозначные аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ определены в D_1 и D_2 соответственно, причём $f_1(z) \equiv f_2(z)$ в D_{12} .

Определение. Функция $F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2, \end{cases}$ аналитическая в $D = D_1 \cup D_2$, называется *аналитическим продолжением функции $f_1(z)$ с D_1 на область D* (либо *ана-*

литическим продолжением функции $f_2(z)$ с D_2 на D).

Получаемая таким способом функция называется также *непосредственным аналитическим продолжением*.

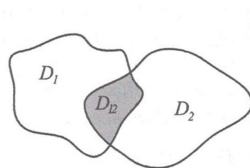


Рис. 65

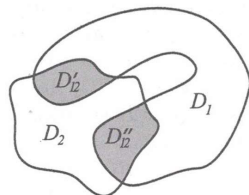


Рис. 66

В ситуациях, изображённых как на рис. 65, так и 66, аналитическое продолжение $F(z)$ через D_{12} функции $f_1(z)$ определено единственным образом (в силу теоремы 20.1).

Обратимся теперь к случаю, когда для множества D_{12} , состоящего из нескольких областей (на рис. 66 $D_{12} = D'_{12} \cup D''_{12}$), функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в D'_{12} , но различны в D''_{12} . Тогда на множестве $\hat{D} = D \setminus D''_{12}$ определена единственная аналитическая функция $\hat{F}(z)$ — аналитическое продолжение $f_1(z)$ с $D_1 \setminus D''_{12}$ на область $\hat{D}$. Эта функция имеет вид

$$\hat{F}(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \setminus D''_{12}, \\ f_2(z), & z \in D_2 \setminus D''_{12}. \end{cases}$$

В свою очередь, $\hat{F}(z)$ может быть продолжена на D''_{12} , причём двумя способами:

$$F_1(z) = \begin{cases} \hat{F}(z), & z \in \hat{D}, \\ f_1(z), & z \in D''_{12} \end{cases} \quad \text{либо} \quad F_2(z) = \begin{cases} \hat{F}(z), & z \in \hat{D}, \\ f_2(z), & z \in D''_{12}. \end{cases}$$

Таким образом, в итоге получается двузначная функция, определённая на множестве D , в точках области D_{12} принимающая по два значения. Она имеет две регулярные однозначные ветви $\hat{F}_1(z)$ и $\hat{F}_2(z)$.

20.3. Продолжение через границу области (принцип непрерывности)

Теорема 20.2. Пусть D_1 и D_2 — односвязные области с кусочно гладкими границами ∂D_1 и ∂D_2 соответственно, а функции $f_1(z) \in \mathcal{A}(D_1)$, $f_2(z) \in \mathcal{A}(D_2)$ и непрерывны вплоть до границы каждой в своей области. Пусть $D_1 \cap D_2 = \emptyset$, а границы ∂D_1 и ∂D_2 имеют в качестве общей части простую дугу l . Тогда если $f_1(z) \equiv f_2(z)$ для всех $z \in l$, то функция

$$F(z) = \begin{cases} f_1(z), & z \in D_1 \cup \partial D_1, \\ f_2(z), & z \in D_2 \cup \partial D_2 \end{cases} \quad (1)$$

является аналитической в области $D = D_1 \cup l \cup D_2$.

▷ Из условия следует, что функция (1) непрерывна вплоть до границы в односвязной области D . Покажем, что для любого замкнутого контура γ , лежащего в D , $\oint_{\gamma} F(z) dz = 0$.

В самом деле, если $\gamma \subset D_1$ либо $\gamma \subset D_2$, это следует из интегральной теоремы Коши 13.1.

Рассмотрим случай, когда кривая γ принадлежит D_1 и D_2 (рис. 68). Пусть γ_1 (γ_2) — та её часть, что находится в D_1 (D_2). Дополняя γ_1 частью l_1 дуги l до замкнутого контура в $D_1 \cup \partial D_1$, в силу обобщения теоремы Коши 13.3 имеем $\oint_{\gamma_1 \cup l_1} F(z) dz = 0$. Аналогично $\oint_{\gamma_2 \cup l_2} F(z) dz = 0$. Тогда

$$0 = \oint_{\gamma_1 \cup l_1} F(z) dz + \oint_{\gamma_2 \cup l_2} F(z) dz = \oint_{\gamma} F(z) dz,$$

так как интегралы по l_1 и l_2 взаимно уничтожаются.

Наконец, если l содержит часть γ , результат также вытекает из теоремы 13.3.

В итоге по теореме Морера получаем $F(z) \in \mathcal{A}(D)$ ◁

Замечание. В условии теоремы 20.2 задана непрерывность $F(z)$ на кривой l , а результат утверждает её аналитичность на этой дуге. Таким образом, $f_1(z)$ ($f_2(z)$) аналитически продолжена на область D через границу l .

20.4. Аналитическое продолжение с помощью степенных рядов

Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$, имеющий радиус сходимости $R_0 > 0$. Согласно результатам п. 18.2, его сумма $f_0(z)$ — однозначная аналитическая функция в круге $K_0 = \{|z - z_0| < R_0\}$.

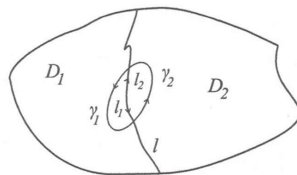


Рис. 67

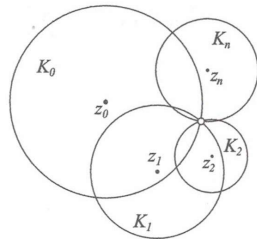


Рис. 68

В окрестности точки $z_1 \in K_0$, $z_1 \neq z_0$, в силу теоремы Тейлора для $f_0(z)$ существует разложение в степенной ряд

вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(1)}(z - z_1)^n$ с радиусом сходимости $R_1 > 0$. Может случиться так, что круг сходимости полученного ряда $K_1 = \{|z - z_1| < R_1\}$ выходит за пределы области K_0 (рис. 68). Тогда сумма этого ряда $f_1(z)$ (совпадающая на множестве $K_0 \cap K_1$ по теореме единственности с $f_0(z)$) является непосредственным аналитическим продолжением $f_0(z)$ на большую область. Далее, взяв за центр разложения некоторую точку $z_2 \in K_1$, $z_2 \neq z_1$, найдем ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(2)}(z - z_2)^n$, сумма которого $f_2(z) \in \mathcal{A}(K_2)$, где $K_2 = \{|z - z_2| < R_2\}$. Если K_2 выходит за пределы $K_0 \cup K_1$, снова получается аналитическое продолжение и т.д. Возможно, через некоторое количество шагов очередной круг K_n , на который продол-

жаются исходная функция, будет иметь непустое пересечение с начальным кругом K_0 , $G = K_n \cap K_0$. Результат аналитического продолжения может совпасть на G с $f_0(z)$, но может и оказаться другим. В последнем случае указанная процедура приводит к неоднозначной функции на G .

Пример

▷ Степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ сходится в круге $K_0 = \{|z| < 1\}$ к $f_0(z) = \frac{1}{1-z}$. Заметим, что вне K_0 ряд расходится, так что там его сумма $f_0(z)$ не определена. Возьмем $z_1 \in K_0$, $z_1 \neq 0$. Разложение $f_0(z)$ по степеням $(z - z_1)$ имеет вид

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-z_1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z-z_1}{1-z_1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_1)^n}{(1-z_1)^{n+1}} = f_1(z), \quad (3)$$

причём функция $f_1(z)$ определена и аналитична в круге $K_1 = \{|z - z_1| < |z_1 - 1|\}$. Если этот круг не содержится целиком в K_0 , то ряд (1) дает аналитическое продолжение суммы исходного ряда.

Задав произвольным значением $z^* \neq 1$, можно построить цепочку кругов $\{K_j\}$, последним элементом которой станет круг $K_m = \{|z - z^*| < R_m\}$, в котором ряд, аналогичный (1), сходится к функции $f_m(z) = \frac{1}{1-z}$. При этом радиус сходимости $R_m = |z^* - 1|$ (рис. 69).

Итак, с помощью степенных рядов получено аналитическое продолжение функции $\frac{1}{1-z}$ с круга K_0 на всю комплексную плоскость за исключением точки $z = 1$ ◀

Замечание. В рассмотренном примере точка $z = 1$ всегда лежит на границе круга сходимости очередного степенного ряда. Она является особой точкой функции $\frac{1}{1-z}$.

Будем называть *особыми точками* аналитической в какой-то области функции $f(z)$ точки, где нарушается аналитичность. При этом особая точка z_0 называется *устраняемой*, если существует аналитическое продолжение $f(z)$ в некоторую окрестность z_0 ; такие точки также называют регулярными, т.е. фактически их не считают особыми. Если же такого продолжения не существует – это *неустраняемая* особая точка. Приведённое описание особых точек является достаточно общим. Частные примеры представляют собой точки ветвления многозначных функций (см. §§9-10), а также изолированные особые точки однозначных функций (см. ниже §22).

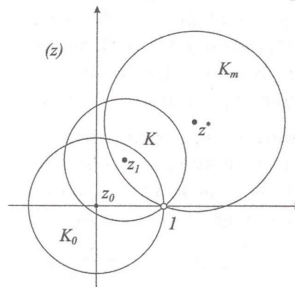


Рис. 69

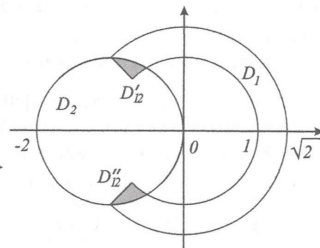


Рис. 70

Нетрудно показать ([1]–[3]), что сумма любого степенного ряда с ненулевым конечным радиусом сходимости R обязана иметь хотя бы одну особую точку на границе круга сходимости.

Таким образом, при разложении функции $f(z)$, однозначной и аналитической в некоторой окрестности точки z_0 , в ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_0)^n$ радиус R его круга сходимости можно найти, не вычисляя коэффициентов ряда: это расстояние от z_0 до ближайшей особой точки $f(z)$.

Отметим при этом, что *сходимость степенного ряда в граничной точке его круга сходимости не связана с тем, является ли данная точка особой или нет*. В самом деле, ряд $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ расходится во всех точках окружности $\{|z| = 1\}$, хотя особой точкой его суммы является лишь $z = 1$ (в окрестности любой другой точки единичной окружности имеется аналитическое продолжение суммы этого ряда – см. рис. 69).

С другой стороны, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} z^{n+1}$ сходится в круге $\{|z| < 1\}$ к сумме $f(z) = -z + (1+z)\ln(1+z)$ (проверьте, получив это разложение либо просуммировав ряд). Функция $f(z)$ имеет особую точку $z = -1$. В то же время данный ряд абсолютно сходится в любой точке окружности $\{|z| = 1\}$.

В заключение приведем **пример** функции, аналитической в круге $\{|z| < 1\}$, для которой все точки единичной окружности являются особыми, так что её невозможно аналитически продолжить ни в какую более широкую область.

▷ Пусть $f(z) = 1 + z^2 + z^4 + \dots + z^{2^n} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$.

Так как радиус сходимости $R = 1$, то $f(z) \in \mathcal{A}(\{|z| < 1\})$.

Рассмотрим поведение $f(z)$ при $|z| \rightarrow 1-0$. Если $z = x \in (0; 1)$, то частичная сумма $f_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2^n}$ стремится к $n+1$, когда $x \rightarrow 1$. Значит, $\forall n$ найдется такое

число $\delta(n) > 0$, что $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2^n} > 1 + x^2 + x^4 + \dots + x^{2^n} > n$ при $1 - \delta(n) < x < 1$, следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = +\infty$, так что $z = 1$ – неустранимая особая точка $f(z)$.

Сумму $f(z)$ можно представить в виде $z^2 + f(z^2)$, откуда вытекает, что особыми точками являются также корни уравнения $z^2 = 1$, т.е. $z = \pm 1$. Далее, так как

$f(z) = z^2 + z^4 + f(z^4)$, заключаем, что особыми точками $f(z)$ являются корни уравнения $z^4 = 1$. Продолжая этот процесс, приходим к выводу, что для любого $n \in \mathbb{N}$ корни уравнения $z^{2^n} = 1$ – особые точки $f(z)$. А так как при $n \rightarrow \infty$ они образуют всюду плотное множество на окружности $\{|z| = 1\}$, то все её точки являются особыми для $f(z)$, ибо в окрестности любой точки единичной окружности $f(z)$ не ограничена <

20.5. Понятие полной аналитической функции

Определения. Пусть однозначная функция $f(z)$ определена в области D , $f(z) \in \mathcal{A}(D)$. Пара вида $\{f, D\}$ называется *элементом аналитической функции* (коротко: *элементом*).

Элемент $\{f_1, D_1\}$ называется *непосредственным аналитическим продолжением* элемента $\{f, D\}$, если $D_1 \cap D \neq \emptyset$ и $f_1(z) = f(z)$ при $z \in D_1 \cap D$.

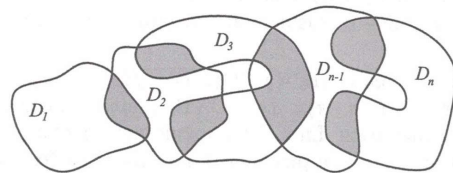


Рис. 71

Элементы $\{f_1, D_1\}, \{f_2, D_2\}, \dots, \{f_n, D_n\}$ образуют *цепочку*, если в этой совокупности каждый элемент $\{f_{k+1}, D_{k+1}\}$ является непосредственным аналитическим продолжением $\{f_k, D_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, n-1$) – см. рис. 71.

Два элемента $\{f, D\}$ и $\{g, G\}$ называются *аналитическим продолжением* один другого, если существует цепочка, их соединяющая.

Построив для исходного элемента $\{f, D\}$ разные цепочки, можно получить различные аналитические продолжения.

Полной аналитической функцией, порожденной элементом $\{f, D\}$, называется совокупность F всех возможных его аналитических продолжений.

Примеры

▷ а) Пусть $D_1 = \{1 < |z| < \sqrt{2}, |\arg z| < \frac{3\pi}{4}\}$ и $D_2 = \{|z+1| < 1\}$ (рис. 70). Так как $D_1 \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, функция $f(z) = \ln z = \ln |z| + i \arg z$ аналитична в D_1 . Ее аналитическое продолжение в D_2 посредством D'_{12} — это функция $F_1(z) = \ln |z| + i\varphi_1$, определённая в точках z , аргумент которых $\varphi_1 \in (\pi/2; 3\pi/2)$. С другой стороны, аналогичного вида функция $F_2(z)$, полученная как аналитическое продолжение $f(z)$ в D_2 посредством D''_{12} , определена в точках z , для которых аргумент $\varphi_2 \in (-3\pi/2; -\pi/2)$. Поэтому для любой точки $z \in D_2$ справедливо равенство $\operatorname{Im} F_1(z) - \operatorname{Im} F_2(z) = 2\pi$. Итак, на D_2 получена двужанная функция, являющаяся продолжением однозначной главной ветви логарифма <

▷ б) Для элемента $\{f, D\}$, где $f(z) = \ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in (-\pi; \pi)$, $D = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, полной аналитической функцией является $\operatorname{Ln} z$. Эту функцию удобно рассматривать определенной на римановой поверхности (см. п. 10.3).

в) Сумма ряда $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ и область $D = \{|z| < 1\}$ образуют элемент $\{f, D\}$, всевозможные продолжения которого (см. пример п. 20.4) приводят к полной аналитической функции $\frac{1}{1-z}$, определенной на $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ <

20.5. Вопросы и задачи

1. Используя продолжение с действительной прямой, докажите равенства $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$; $\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$.

2. Верно ли, что $(1+z)^\mu = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu(\mu-1)\cdots(\mu-n+1)}{n!} z^n$? Как следует понимать это равенство?

3. Функция $f(z) = \frac{z}{z^2 - 2z + 4}$ представлена рядом Тейлора по степеням $(z - z_0)$. Укажите радиус и круг сходимости этого ряда, если а) $z_0 = -1$; б) $z_0 = i$.

4. Укажите радиус сходимости степенного ряда, представляющего в окрестности точки $z_0 = 0$ функцию $f(z)$ (если такое представление возможно):

$$а) f(z) = \frac{z}{e^z - 1}; \quad б) f(z) = \frac{e^z - 1}{z}.$$

5. Радиусы сходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$ равны R_1 и R_2 соответственно. Что можно сказать о радиусе сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) z^n$?

6. Ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ сходится в замкнутом круге $\{|z| \leq R\}$. Верно ли, что сумма этого ряда $f(z) \in A(\{|z| \leq R\})$?

7. Пусть $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} z^n$, $D_1 = \{|z| < 1\}$ и $f_2(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} (z+2)^n$, $D_2 = \{|z+2| < 1\}$. Покажите, что элементы $\{f_1, D_1\}$ и $\{f_2, D_2\}$ являются аналитическим продолжением друг друга.

Глава 5

Ряды Лорана и классификация особых точек

§21. Ряд Лорана

21.1. Понятие ряда Лорана и свойства его суммы

Функциональный ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad c_n \in \mathbb{C}, \quad (1)$$

называется *рядом Лорана*. Числа $c_n \in \mathbb{C}$ — это *коэффициенты* ряда Лорана.

Ряд Лорана (1) можно переписать в виде

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}. \quad (2)$$

Определение. Пусть $z_0 \neq \infty$. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$ (3)

называется *правильной частью*, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n}$ (4) называется *главной частью* ряда Лорана (2).

Замечание 1. Случай $z_0 = \infty$ будет обсуждаться ниже (см. замечание 3).

Определение. Ряд Лорана (1) сходится в точке z , если в этой точке сходятся его правильная и главная части одновременно.

Теорема 21.1. Пусть числа R и r определяются равенствами $R^{-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_{-n}|}$, $0 \leq r < R \leq +\infty$. Тогда ряд Лорана (1) абсолютно сходится в любой точке кольца $\mathcal{K}_{r,R} = \{z : r < |z - z_0| < R\}$, равномерно сходится внутри этого кольца, а его сумма $f(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{r,R})$.

▷ Согласно теореме Коши-Адамара (теорема 18.1) степенной ряд (3) абсолютно сходится в каждой точке круга $|z - z_0| < R$, где $R > 0$ определено в условии. В соответствии с теоремой 18.2 эта сходимость равномерна внутри круга. Сумма $f_1(z)$ ряда (3) является аналитической в этом круге функцией (см. следствие 1 теоремы 18.2).

Рассмотрим ряд (4), совершив замену $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$. Аналогично предыдущему можно утверждать, что степенной ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n$ сходится абсолютно в каждой точке и равномерно внутри круга $\left\{|\zeta| < \frac{1}{r}\right\}$ к некоторой аналитической функции $g(\zeta)$. Это равносильно абсолютной сходимости ряда (4) к некоторой функции $f_2(z) = g\left(\frac{1}{z - z_0}\right)$ вне круга радиуса r с центром в z_0 , т.е. при $|z - z_0| > r$.

Если $r < R$, то существует область, где абсолютно сходятся оба ряда (3), (4) — кольцо $\mathcal{K}_{r,R} = \{z : r < |z - z_0| < R\}$.

Пусть компакт $K \subset \mathcal{K}_{r,R}$, тогда его образ K_1 при преобразовании $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ также является компактом (поскольку $z_0 \notin \mathcal{K}_{r,R}$), причем $K_1 \subset \left\{|\zeta| < \frac{1}{r}\right\}$. По теореме Абеля (теорема 18.2) сходимость ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} c_{-n} \zeta^n$ равномерна на K_1 , что приводит к равномерной сходимости ряда (4) на K . В силу произвольности выбора компакта K это означает равномерную сходимость (4) внутри $\mathcal{K}_{r,R}$.

Поскольку $g(\zeta) \in \mathcal{A}\left(\left\{|\zeta| < \frac{1}{r}\right\}\right)$, а функция $\zeta = \frac{1}{z - z_0}$ аналитична при $z \neq z_0$, то по теореме об аналитичности сложной функции $f_2(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{r,R})$. Таким образом, сумма ряда Лорана $f(z) = f_1(z) + f_2(z) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{r,R})$ $\triangleleft$

Следствие. Ряд Лорана допускает почленное дифференцирование в кольце $\mathcal{K}_{r,R}$ и почленное интегрирование на любой кусочно гладкой кривой $\gamma \subset \mathcal{K}_{r,R}$.

▷ Утверждение следует из соответствующих результатов для степенных рядов (следствия 2, 3 из теоремы 18.2) $\triangleleft$

Замечание 2. Числа R и r из условия теоремы 21.1 можно вычислить по формулам

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|, \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{-n-1}}{c_{-n}} \right|$$

(если эти пределы существуют).

21.2. Теорема Лорана

Теорема 21.2 (Лоран). Пусть $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая в некотором кольце $\mathcal{K}_{r,R} = \{z : r < |z - z_0| < R\}$. Тогда $f(z)$ можно разложить в сходящийся в этом кольце ряд Лорана, причём единственным образом.

▷ Возьмем произвольную точку $z \in \mathcal{K}_{r,R}$ и выберем такие числа R_1, R_2 , что $r < R_2 < |z - z_0| < R_1 < R$ (см. рис. 72). Из условия следует $f(\zeta) \in \mathcal{A}(\mathcal{K}_{R_2,R_1})$, поэтому в силу теоремы 14.2 получаем

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (5)$$

Если $\zeta \in \gamma_{R_1}$, то $\left| \frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right| < 1$, а, значит,

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}},$$

причем этот ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in \gamma_{R_1}$. Поэтому

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_1}} f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n, \end{aligned}$$

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_1}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$, $n = 0, 1, 2, \dots$

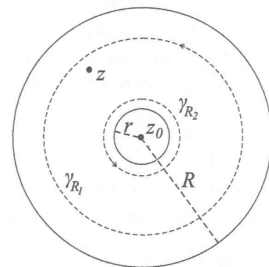


Рис. 72

Для $\zeta \in \gamma_{R_2}$ имеем $\left| \frac{\zeta - z_0}{z - z_0} \right| < 1$, следовательно,

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\zeta - z_0}{z - z_0}} = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}},$$

где ряд сходится равномерно относительно $\zeta \in \gamma_{R_2}$. Тогда

$$f_2(z) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} f(\zeta) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\zeta - z_0)^n}{(z - z_0)^{n+1}} d\zeta$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}} \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} f(\zeta) (\zeta-z_0)^n d\zeta = \\
 &= \sum_{n=-1}^{-\infty} (z-z_0)^n \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta = \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n (z-z_0)^n, \\
 &\text{где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_{R_2}} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = -1, -2, \dots
 \end{aligned}$$

Итак, в соответствии с равенством (5) получено разложение в ряд Лорана

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n.$$

Здесь коэффициенты c_n задаются выражениями, приведенными выше. Однако нетрудно видеть, что в качестве кривой интегрирования в формулах для c_n можно взять любой замкнутый контур $\Gamma \subset \mathcal{K}_{r,R}$, лишь бы $z_0 \in \text{int } \Gamma$, так что

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (6)$$

Для доказательства единственности разложения $f(z)$ в ряд Лорана предположим, что существует другое представление:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-z_0)^n, \quad \text{т.е. в кольце } \mathcal{K}_{r,R} \text{ имеет место равенство} \\
 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-z_0)^n &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c'_n (z-z_0)^n. \quad (7)
 \end{aligned}$$

Рассмотрим окружность $\gamma_\rho = \{z : |z-z_0| = \rho\}$ ($r < \rho < R$), зафиксируем произвольно выбранное число $k \in \mathbb{Z}$. После умножения обеих частей (7) на $(z-z_0)^{-k-1}$ проинтегрируем полученное равенство по окружности γ_ρ . Так как

$$\oint_{\gamma_\rho} (z-z_0)^{n-k-1} dz = \begin{cases} 0, & n \neq k, \\ 2\pi i, & n = k, \end{cases}$$

то в результате получаем $c_k = c'_k$. Поскольку k выбрано произвольно, оба ряда в (7) совпадают $\triangleleft$

Замечание 3 (случай $z_0 = \infty$). Для разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = \infty$ можно сделать преобразование $z = \frac{1}{\zeta}$, затем функцию $f\left(\frac{1}{\zeta}\right)$ разложить в ряд в окрестности точки $\zeta_0 = 0$ и вернуться к прежней переменной z .

Фактически искомое представление – это разложение по степеням $\frac{1}{z}$. Поэтому правильную часть ряда образуют члены с неположительными степенями z , а главную часть – с положительными степенями z , т.е. с отрицательными степенями $\frac{1}{z}$. При этом ряд Лорана в окрестности $z_0 = \infty$ может выглядеть так же, как и в окрестности $z_0 = 0$, если иных особых точек нет (см. ниже примеры 1а)–б), 3а)–б), 5) либо иначе (см. пример 2б)–с)). В первом случае главная и правильная части ряда меняются местами (за исключением свободного члена, который всегда является принадлежностью правильной части).

21.3. Примеры разложения функций в ряд Лорана

1. Допускают ли данные функции разложение в ряд Лорана в окрестности данной точки z_0 ? (Здесь имеется в виду проколота окрестность точки z_0 , т.е. кольцо с нулевым внутренним радиусом).

$$a) \quad f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$\triangleright$ $f(z)$ – аналитическая функция при $z \neq 0$, следовательно, по теореме 21.2 разложение существует. Его можно получить, используя известное разложение $\sin z$ в степенной ряд, сходящийся во всей плоскости:

$$\sin \frac{1}{z} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{z^{2n-1}}, \quad 0 < |z| < +\infty. \quad (8)$$

Все члены (8) принадлежат главной части ряда Лорана $\triangleleft$

$$b) \quad f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

$\triangleright$ Разложение возможно. Обоснование то же, что в примере а), только множество $\{0 < |z| < +\infty\}$ рассматривается как окрестность точки $z_0 = \infty$. Ряд Лорана имеет тот же вид (8), однако это разложение следует воспринимать как ряд по степеням $\frac{1}{z}$, поэтому все его члены принадлежат правильной части ряда $\triangleleft$

$$c) \quad f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z+1}}, \quad z_0 = -1.$$

$\triangleright$ Функция не аналитична в точках, где $\sin \frac{1}{z+1} = 0$, т.е. при $z_n = -1 + \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$. Поскольку $z_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$, то не существует проколотой окрестности точки $z_0 = -1$, где $f(z)$ аналитична. Поэтому разложение в ряд Лорана при указанном условии невозможно $\triangleleft$

$$d) \quad f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}, \quad z_0 = 0.$$

$\triangleright$ В точках, где $\cos \frac{1}{z} = 0$, функция теряет аналитичность. Последовательность $z_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \pi n}$ сходится к $z_0 = 0$ при $n \rightarrow \infty$. Разложение невозможно, как и в п. c) $\triangleleft$

$$e) \quad f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

$\triangleright$ В предыдущем примере найдены корни уравнения $\cos \frac{1}{z} = 0$. Нетрудно видеть, что $|z_n| \leq \frac{2}{\pi}$, поэтому $f(z)$ аналитична в проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$. Значит, разложение в ряд Лорана возможно.

Заметим, что исходная постановка е) равносильна вопросу о разложимости функции $\operatorname{tg} \zeta$ в ряд в окрестности точки $\zeta_0 = 0$ $\triangleleft$

$$f) \quad f(z) = \frac{1}{e^z + 2}, \quad z_0 = \infty.$$

$\triangleright$ Нули знаменателя дроби имеют вид $z_n = \operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + i \operatorname{Arg}(-2) = \ln 2 + i\pi(2n+1)$, $n \in \mathbf{Z}$. Поскольку $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$, то не существует проколотой окрестности точки $z_0 = \infty$, где $f(z)$ аналитична. Поэтому разложение в ряд Лорана невозможно $\triangleleft$

$$g) \quad f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 0.$$

$\triangleright$ Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z_0 = 0$ невозможно, так как $f(z)$ неоднозначна $\triangleleft$

$$h) \quad f(z) = \ln z, \quad z_0 = 0.$$

$\triangleright$ Не существует окрестности точки $z_0 = 0$, где данная функция была бы непрерывной. В самом деле, например, при условии $\arg z \in (-\pi, \pi]$ вещественная отрицательная полуось является линией разрывов. Тем более функция $f(z) = \ln z$ не является аналитической в проколотой окрестности точки $z_0 = 0$, поэтому здесь невозможно разложение $f(z)$ в ряд Лорана $\triangleleft$

$$2. \text{ Разложить в ряд Лорана } f(z) = \frac{z^2 + 2z - 3}{(z-2)(z^2+1)}$$

а) в кольце $\{1 < |z| < 2\}$; б) в окрестности точки $z_0 = 0$; c) в окрестности точки $z_0 = \infty$.

$\triangleright$ Представим $f(z)$ в виде суммы дробей

$$f(z) = \frac{1}{z-2} + \frac{2}{z^2+1}.$$

Ниже для получения разложений будем пользоваться формулой $\frac{1}{1-q} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n$, где $|q| < 1$.

а) Так как $|z| > 1$ и $|z| < 2$, то

$$\frac{1}{z-2} = -\frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} = -\frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^n} \quad (\text{при } |z| < 2) \quad (9)$$

и

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{z^2} \frac{1}{1+\frac{1}{z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z^{2n+2}} \quad (\text{при } |z| > 1). \quad (10)$$

Итак,
$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^{2n}}, \quad 1 < |z| < 2.$$

б) Для требуемого разложения следует взять ряд (9), а вместо (10) – представление $\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$, где $|z^2| < 1 \Leftrightarrow |z| < 1$. Таким образом,

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}, \quad |z| < 1. \quad (11)$$

Заметим, что полученное представление имеет место не в кольце $\{0 < |z| < 1\}$, а внутри круга $\{|z| < 1\}$, так как $f(z)$ здесь аналитична. При этом (11) является рядом Тейлора функции $f(z)$ (частный случай ряда Лорана, когда главная часть отсутствует).

с) В этом случае, очевидно, $|z| > 2$ и для получения искомого разложения следует взять (10), а первое слагаемое

представить в виде

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n}, \quad \left| \frac{2}{z} \right| < 1.$$

Тогда
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{z^{2n}}, \quad |z| > 2,$$

– разложение в ряд Лорана в окрестности $z_0 = \infty$. В этом представлении также отсутствует главная часть (есть лишь положительные степени $\frac{1}{z}$) $\triangleleft$

3. Разложить в ряд Лорана $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$

а) в окрестности точки $z_0 = 0$; б) в окрестности точки $z_0 = \infty$.

$\triangleright$ Используя известное разложение e^z , получаем

$$f(z) = z^2 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^{n-2}} = z^2 + z + \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)!} \frac{1}{z^n}. \quad (12)$$

Так как (12) верно при $0 < |z| < +\infty$, этот ряд дает решение и в случае а), и в случае б). В окрестности $z_0 = 0$ правильная часть ряда Лорана состоит из первых трёх слагаемых (12), а главная часть содержит бесконечное число членов. Напротив, разложение в окрестности $z_0 = \infty$ имеет главную часть, состоящую лишь из двух первых слагаемых, а все остальные принадлежат правильной части $\triangleleft$

4. Разложить в ряд Лорана $f(z) = \cos \frac{z^2 - 4z}{(z-2)^2}$ в окрестности точки $z_0 = 2$.

$$\triangleright f(z) = \cos \frac{(z^2 - 4z + 4) - 4}{(z-2)^2} = \cos \left(1 - \frac{4}{(z-2)^2} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \cos 1 \cdot \cos \frac{4}{(z-2)^2} + \sin 1 \cdot \sin \frac{4}{(z-2)^2} = \\
&= \cos 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 4^{2n}}{(2n)!} \frac{1}{(z-2)^{4n}} + \\
&+ \sin 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^{2n-1}}{(2n-1)!} \frac{1}{(z-2)^{2(2n-1)}}, \text{ где } 0 < |z-2| < +\infty
\end{aligned}$$

5. Разложить в ряд Лорана $f(z) = e^z + \frac{1}{z}$ в области $0 < |z| < +\infty$.

$$\triangleright f(z) = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z^m}{m!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{z^n} = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{m-n}}{m! n!}$$

(перестановка членов возможна, поскольку оба ряда сходятся абсолютно). Фиксируем $k \in \mathbb{Z}$. Если $m - n = k \geq 0$, т.е. $m = n + k$, то при каждом n во внутренней сумме остается лишь слагаемое с $m = n + k$. Тогда коэффициент при z^k равен $c_k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+k)!}$, $k = 0, 1, 2, \dots$

Аналогично при $m - n = k < 0$, т.е. $n = m - k$, получаем $c_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m! (m-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n-k)!}$, $k = -1, -2, \dots$

Итак, искомое разложение имеет вид $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k z^k$ с коэффициентами, указанными выше $\triangleleft$

21.4. Вопросы и задачи

1. Найдите области сходимости следующих рядов:

$$a) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^n + i} (z + 2i)^n; \quad b) \frac{2i - 1}{(2iz + 1)^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^n}{n!} (2iz + 1)^n;$$

$$c) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{n^2}{e^{|n|}} z^n; \quad d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{3^n} (z - i)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{i^n}{4^n} \frac{1}{(z - i)^n}.$$

2. Выясните, допускает ли функция $f(z)$ разложение в ряд Лорана в проколотой окрестности точки z_0 , если

$$a) f(z) = \operatorname{th} z, \quad z_0 = 0; \quad z_0 = \infty;$$

$$b) f(z) = \left(\cos \frac{1}{z} \right)^{-1}, \quad z_0 = 0; \quad z_0 = \infty;$$

$$c) f(z) = \frac{z}{1 - \cos^2 z}, \quad z_0 = 0; \quad z_0 = 1; \quad z_0 = \infty;$$

$$d) f(z) = \frac{z}{\cos^2 z + 3}, \quad z_0 = 0; \quad z_0 = \infty;$$

$$e) f(z) = \operatorname{Ln} \frac{z-1}{z+3}, \quad z_0 = 1; \quad z_0 = \infty;$$

$$f) f(z) = \ln \frac{z-1}{z+3}, \quad z_0 = 0; \quad z_0 = -3; \quad z_0 = \infty.$$

3. Разложите $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности z_0 , если

$$a) f(z) = \frac{z}{z^2 + 5z + 4}, \quad z_0 = -4; \quad b) f(z) = e^{\frac{z}{z-2}}, \quad z_0 = 2;$$

$$c) f(z) = \frac{1}{(z^2 - 1)^2}, \quad z_0 = 1; \quad d) f(z) = \sin \frac{z+1}{z-2}, \quad z_0 = 2;$$

4. Функцию $f(z)$ разложите в ряд Лорана по степеням $(z - z_0)$ в области D , содержащей точку z^* , и укажите эту область, если

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z - 4}, \quad z_0 = -1, \quad z^* = 2i;$$

$$b) f(z) = \frac{z^2 + 5}{(z^2 - 4)(2z^2 + 1)}, \quad z_0 = 0, \quad z^* = -1;$$

$$c) f(z) = \frac{z}{(z-1)^2}, \quad z_0 = -1, \quad z^* = 2.$$

5. Ряд Лорана некоторой функции $f(z)$ имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} + \frac{5^n}{z^{2n+1}} \right).$$

Найдите разложение в ряд Лорана по степеням z аналитического продолжения $f(z)$ в кольце, содержащем точку $z = 2i$. Укажите границы этого кольца.

6. Докажите, что если функция $f(z)$ четная и аналитическая в кольце $0 < |z| < R$, то ее ряд Лорана

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$$

имеет коэффициенты $c_{2n+1} = 0$.

7. Функция $f(z)$ аналитична в кольце $r < |z - z_0| < R$. Для $\rho \in (r, R)$ обозначим $M(\rho) = \max_{|z-z_0|=\rho} |f(z)|$. Докажите, что для коэффициентов ряда Лорана $f(z)$ по степеням $(z - z_0)$ справедлива оценка $|c_n| \leq \frac{M(\rho)}{\rho^n}$.

§22. Изолированные особые точки однозначной функции

22.1. Основные понятия

Пусть $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая в некоторой проколотой окрестности точки z_0 , т.е. в кольце $K \equiv K_{0,R} = \{z : 0 < |z - z_0| < R\}$, если $z_0 \neq \infty$, или на множестве $K \equiv K_{\infty} = \{z : B < |z| < +\infty\}$ при некотором $B > 0$, если $z_0 = \infty$.

Определение. Если $f \in A(z_0)$, то точка z_0 называется *правильной (регулярной) точкой* этой функции. В противном случае (т.е. $f \in A(K)$, но $f \notin A(z_0)$) точка z_0 — *особая точка* (или: *изолированная особая точка*) функции $f(z)$.

Согласно теореме 21.2 в K имеет место разложение $f(z)$ в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n, \quad z_0 \neq \infty \quad (1)$$

(если $z_0 = \infty$, то вместо (1) имеем ряд по степеням z , сходящийся в области K_{∞}).

Вид ряда (1) служит основой для классификации изолированных особых точек однозначной функции.

Определения. Пусть $z_0 \neq \infty$ — особая точка $f(z)$.

Точка z_0 — *устраняемая особая точка* $f(z)$ (у.о.т.), если главная часть ряда Лорана (1) равна нулю.

Точка z_0 — *полнос* функции $f(z)$, если главная часть ряда (1) содержит конечное число членов.

Точка z_0 — *полнос порядка k* ($k \in \mathbb{N}$) функции $f(z)$, если k — максимальная по модулю степень у ненулевого члена главной части лорановского разложения в проколотой окрестности точки z_0 . А именно, ряд (1) имеет коэффициент $c_{-k} \neq 0$, в то время как $c_{-n} = 0 \quad \forall n > k$.

Полнос первого порядка называется *простым полюсом*.

Точка z_0 — *существенно особая точка* $f(z)$ (с.о.т.), если главная часть ряда (1) содержит бесконечное число членов.

В случае $z_0 = \infty$ определения сохраняются, основой для них является ряд Лорана $f(z)$, сходящийся в K_{∞} .

22.2. Поведение функции в окрестности изолированной особой точки

В этом разделе всюду предполагается, что $f(z)$ — функция, однозначная и аналитическая в некоторой проколотой окрестности K точки z_0 , z_0 — особая точка $f(z)$. Там, где используется явный вид лорановского разложения, ради определенности считаем $z_0 \neq \infty$.

Теорема 22.1. Точка z_0 – устранимая особенность $f(z)$ тогда и только тогда, когда функция $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности этой точки.

▷ 1) Так как z_0 – устранимая особая точка $f(z)$, имеет место представление

$$f(z) = c_0 + c_1(z - z_0) + \dots + z_n(z - z_0)^n + \dots, \quad z \in K.$$

Ряд в правой части, сходящийся по условию при $z \in K$, очевидно, сходится и в точке z_0 . Согласно результатам п. 18.2 он определяет аналитическую в окрестности этой точки функцию. Поэтому существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$, следовательно, $f(z)$ ограничена в некоторой окрестности z_0 .

2) Рассмотрим в K представление $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z - z_0)^n$,

$$\text{где } c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad \gamma \subset K, \quad z_0 \in \text{int } \gamma. \quad (2)$$

В качестве кривой интегрирования в (2) выберем окружность достаточно малого радиуса $\gamma_r: |z - z_0| = r$. Так как в некоторой окрестности точки z_0 имеет место неравенство $|f(z)| \leq M$, из (2) получаем оценку

$$\begin{aligned} |c_n| &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_{\gamma_r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \right| \leq \frac{1}{2\pi} \oint_{\gamma_r} \frac{|f(\zeta)|}{|\zeta - z_0|^{n+1}} ds \leq \\ &\leq \frac{M}{2\pi r^{n+1}} \oint_{\gamma_r} ds = \frac{M}{r^n}, \quad \text{верную для всех } r, \quad 0 < r \leq r_0. \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $c_n = 0$ при любом $n < 0$, поскольку $\lim_{r \rightarrow 0} \frac{M}{r^n} = 0$, т.е. z_0 – устранимая особая точка ◁

Следствие. Точка z_0 – устранимая особенность $f(z)$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

▷ Доказательство проведите самостоятельно ◁

Замечания. 1) z_0 – правильная точка $f(z)$ тогда и только тогда, когда определено значение $f(z_0)$ и существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Сравнение двух последних утверждений показывает различие между правильной и устранимой особой точками, которое невозможно выявить из вида ряда Лорана. Таким образом, по существу эти две ситуации одинаковы.

2) Наличие неустранимой особенности у $f(z)$ в изолированной особой точке z_0 означает, что имеет место одна из следующих двух возможностей (при этом в любом случае $f(z)$ не ограничена в окрестности z_0):

а) существует предел $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$;

б) не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

Теорема 22.2. Точка z_0 – полюс функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

▷ 1) Пусть z_0 – полюс $f(z)$, тогда в некоторой проколотой окрестности K точки z_0 имеется представление

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z - z_0)^k} + \dots + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad (3)$$

где $c_{-k} \neq 0$. Равенство (3) можно переписать в виде

$$f(z)(z - z_0)^k = c_{-k} + c_{-k+1}(z - z_0) + \dots + c_0(z - z_0)^k + \dots,$$

причём ряд, стоящий в правой части последнего равенства, сходится в некотором круге $K_r = \{z: |z - z_0| < r\}$. Если $\varphi(z)$ – сумма этого ряда, то $\varphi(z) \in \mathcal{A}(K_r)$, $\varphi(z_0) = c_{-k} \neq 0$.

Поэтому $f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}$ и, очевидно, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

2) Обратно, пусть $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$. Тогда существует проколотая окрестность K точки z_0 , где $f(z) \neq 0$, поэтому

в $\mathcal{K}$ определена аналитическая функция $g(z) = \frac{1}{f(z)}$, причём справедливо равенство $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$. Следовательно, в некоторой окрестности z_0 имеет место представление

$$g(z) = a_k(z - z_0)^k + a_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots = (z - z_0)^k (a_k + a_{k+1}(z - z_0) + \dots),$$

где $k \geq 1$, $a_k \neq 0$, так как $a_0 = \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$. Значит,

$$g(z) = (z - z_0)^k \varphi_1(z), \text{ где } \varphi_1(z) \in \mathcal{A}(z_0), \varphi_1(z_0) \neq 0. \text{ Тогда}$$

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} \cdot \frac{1}{\varphi_1(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^k} (b_0 + b_1(z - z_0) + \dots),$$

где $b_0 = \frac{1}{\varphi_1(z_0)} \neq 0$, т.е. z_0 — полюс $f(z)$ $\triangleleft$

Теорема 22.3. Точка z_0 — полюс порядка k функции $f(z)$ тогда и только тогда, когда в $\mathcal{K}$ справедливо представление

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{(z - z_0)^k}, \text{ где } \varphi(z) \in \mathcal{A}(z_0), \varphi(z_0) \neq 0.$$

$\triangleright$ Утверждение следует из доказательства предыдущей теоремы $\triangleleft$

Следствие. Для того, чтобы в точке z_0 был полюс порядка k функции $f(z)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $g(z) = \begin{cases} \frac{1}{f(z)}, & z \neq z_0, \\ 0, & z = z_0 \end{cases}$ имела в этой точке нуль порядка k .

$\triangleright$ Точка z_0 — нуль порядка k функции $g(z)$ тогда и только тогда, когда

$$g(z) = (z - z_0)^k g_1(z), \text{ где } g_1(z) \in \mathcal{A}(z_0), g_1(z_0) \neq 0$$

(см. п. 19.1). Дальнейшее следует из теоремы 22.3 $\triangleleft$

Теорема 22.4. Изолированная особая точка z_0 функции $f(z)$ является существенно особой тогда и только тогда, когда не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$.

$\triangleright$ Доказательство следует из теорем 22.1, 22.2 и замечания 2 (остается лишь возможность б)) $\triangleleft$

Более точно поведение функции в окрестности существенно особой точки описывает

Теорема 22.5 (Сохоцкий–Казорати–Вейерштрасс). Пусть z_0 — существенно особая точка функции $f(z)$. Тогда для произвольного числа $A \in \overline{\mathbb{C}}$ найдётся такая последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0 , что $f(z_n) \rightarrow A$, $n \rightarrow \infty$.

$\triangleright$ Сначала рассмотрим случай $A = \infty$. Поскольку функция $f(z)$ не ограничена по модулю в любой проколотой окрестности существенно особой точки, найдётся такая последовательность $\{z_n\}$, сходящаяся к z_0 , что $|f(z_n)| \rightarrow +\infty$. Последнее равносильно сходимости $f(z_n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Далее пусть $A \neq \infty$. Предположим, что не существует последовательности $\{z_n\}$, сходящейся к z_0 , для которой $f(z_n) \rightarrow A$. Значит, найдётся такое число $\epsilon > 0$, что для z , $0 < |z - z_0| < \delta$, справедливо неравенство $|f(z) - A| \geq \epsilon$. Тогда

в проколотой окрестности точки z_0 функция $g(z) = \frac{1}{f(z) - A}$ аналитическая, причём $|g(z)| = \frac{1}{|f(z) - A|} \leq \frac{1}{\epsilon}$. Поэтому в силу теоремы 22.1 z_0 — устранимая особая точка $g(z)$, а, значит, существует $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = b_0$.

Если $b_0 = 0$, то для $f(z) = \frac{1}{g(z)} + A$ существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$, поэтому z_0 — полюс функции $f(z)$. Если же $b_0 \neq 0$, то $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \frac{1}{b_0} + A$, стало быть z_0 — у.о.т. $f(z)$. И то, и другое противоречит условию теоремы $\triangleleft$

22.3. Примеры

1. Рассмотрим функцию, которая является суммой сходящегося ряда:

$$f(z) = \dots + \frac{1}{z^n} + \dots + \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{3} + \dots + \frac{z^k}{3^k} + \dots \quad (4)$$

Что можно сказать о характере точки $z_0 = 0$?

▷ Вывод о том, что $z_0 = 0$ — существенно особая точка $f(z)$, так как главная часть ряда Лорана по степеням z содержит бесконечное число членов, неверен. Дело в том, данный ряд сходится в кольце $\{1 < |z| < 3\}$, а классификация особых точек проводится на основе лорановского разложения в проколотой окрестности z_0 .

В нашем случае легко можно суммировать ряды из правильной и главной частей соответственно:

$$1 + \frac{z}{3} + \dots + \frac{z^k}{3^k} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{z}{3}} = \frac{3}{3 - z}, \quad |z| < 3;$$

$$\frac{1}{z} + \dots + \frac{1}{z^n} + \dots = \frac{\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = \frac{1}{z - 1}, \quad \left| \frac{1}{z} \right| < 1, \text{ т.е. } |z| > 1.$$

Таким образом, функция $\hat{f}(z) = \frac{3}{3 - z} + \frac{1}{z - 1} = \frac{2z}{(z - 1)(3 - z)}$, являющаяся аналитическим продолжением (4) с кольца $\{1 < |z| < 3\}$, имеет полюсы в точках $z = 1$ и $z = 3$, а $z_0 = 0$ — ее правильная точка <

2. Для функций из примеров п. 21.3 установить характер особой точки z_0 , используя вид разложения $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности этой точки:

▷ 1 а) $f(z) = \sin \frac{1}{z}$. Точка $z_0 = 0$ — существенно особая, поскольку главная часть ряда Лорана содержит бесконечно много членов.

$$1 б) \quad f(z) = \sin \frac{1}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

В этой точке устранимая особенность, так как все члены ряда принадлежат его правильной части.

$$1 в) \quad f(z) = \frac{1}{\sin \frac{1}{z+1}}, \quad z_0 = -1.$$

Нули знаменателя $z_n = -1 + \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, являются особыми точками (простыми полюсами). Поскольку $z_n \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$, то $z_0 = -1$ — неизолированная особая точка. Разложение в ряд Лорана в ее окрестности невозможно, эта точка не классифицируется по схеме п. 22.1.

1 д) $f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}$. Точка $z_0 = 0$ — неизолированная особенность $f(z)$ (точка, предельная для последовательности простых полюсов $z_n = \left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right)^{-1}$, $n \in \mathbb{Z}$).

$$1 е) \quad f(z) = \operatorname{tg} \frac{1}{z}, \quad z_0 = \infty.$$

В этой точке $f(z)$ имеет устранимую особенность. Действительно, в результате замены $z = \frac{1}{\zeta}$ получаем функцию $\operatorname{tg} \zeta$, которая может быть разложена в ряд Тейлора в окрестности $\zeta_0 = 0$.

1 ф) $f(z) = \frac{1}{e^z + 2}$. Точка $z_0 = \infty$ является неизолированной, так как нули знаменателя $z_n = \ln 2 + i\pi(2n + 1)$, $n \in \mathbb{Z}$, образуют последовательность $z_n \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

$$1 г) \quad f(z) = \operatorname{Ln} z, \quad z_0 = 0.$$

Эта точка (наряду с $z = \infty$) — так называемая *точка ветвления*. Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в ее окрестности невозможно ($f(z)$ неоднозначна), поэтому $z_0 = 0$ не классифицируется в рамках п. 22.1.

3 а), б) На основе разложения в ряд Лорана $f(z) = z^2 \cdot e^{\frac{1}{z}}$

(формула (12) §21), приходим к заключению, что $z_0 = 0$ – существенно особая точка, а $z_0 = \infty$ – полюс второго порядка функции $f(z)$ $\triangleleft$

Замечания. 1) Из вида степенного разложения функций e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ (см. п. 18.4) следует, что каждая из них имеет существенную особенность в точке $z = \infty$.

2) Обычно для исследования особых точек более удобно использовать систему равносильных определений утверждений п. 22.2 (см. примеры ниже).

3. Исследовать характер особых точек данных функций (включая $z = \infty$): а) $f(z) = e^z \operatorname{ctg} z$;

$$b) f(z) = \frac{ze^{\frac{1}{1-z}}}{\cos z - 1}; \quad c) f(z) = \frac{z^6 \sin \frac{1}{z}}{(z^2 + 1)^2}.$$

$\triangleright$ а) Показатель экспоненты – функция $g(z) = \frac{z \cos z}{\sin z}$ – имеет особенности в точках $z_n = \pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$, и $z = \infty$.

Так как $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z \cos z}{\sin z} = 1$, то $z = 0$ – устранимая особая точка $g(z)$. Такой же она является и для $f(z)$, ибо существует $\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = e$.

В точках $z_n = \pi n$, $n \neq 0$, знаменатель $g(z)$ обращается в нуль, а числитель принимает значения, отличные от нуля, значит, $\lim_{z \rightarrow z_n} g(z) = \infty$. Покажем, что каждая из этих точек – существенно особая для $f(z)$. В самом деле, рассматривая для $n \in \mathbf{N}$ вещественные значения $z = \pi n + x$ и $z = \pi n - x$ при достаточно малых величинах $x > 0$, получаем $f(\pi n + x) \rightarrow +\infty$, но $f(\pi n - x) \rightarrow 0$, когда $x \rightarrow 0$. Итак, $\lim_{z \rightarrow \pi n \neq 0} f(z)$ не существует. Аналогично рассматривается случай $n < 0$.

Наконец, $z = \infty$ – неизолированная особая точка $f(z)$.

б) Особыми точками $f(z)$ являются $z = 1$, $z_n = 2\pi n$ ($n \in \mathbf{Z}$), $z = \infty$. Последняя из них, очевидно, неизолированная особенность.

Точка $z = 1$ – существенно особая, поскольку не существует предела $e^{\frac{1}{1-z}}$ при $z \rightarrow 1$ (см. доказательство в п. а)), а остальные множители в этой точке имеют конечные (ненулевые) значения.

При $z \rightarrow 0$ имеем $f(z) \sim \frac{ez}{-\frac{z^2}{2}} = -\frac{2e}{z}$, так что $z = 0$ – простой полюс.

И, наконец, если $z_n = 2\pi n$, $n \neq 0$, то в нуль обращается лишь знаменатель всей дроби $\varphi(z) = \cos z - 1$. Поскольку $\varphi(z_n) = \varphi'(z_n) = 0$, но $\varphi''(z_n) = -\cos z_n = -1 \neq 0$, то z_n – нуль второго порядка $\varphi(z)$, следовательно, полюс второго порядка $f(z)$.

с) Особыми точками $f(z)$ являются $z = 0$, $z = \pm i$, $z = \infty$.

Нетрудно видеть, что $z = i$ – нуль второго порядка знаменателя дроби, причём все остальные множители в этой точке принимают конечные ненулевые значения. Таким образом, $z = i$ (равно как и $z = -i$) – полюс второго порядка $f(z)$.

В окрестности точки $z = 0$ числитель $f(z)$ имеет лорановское разложение

$$z^6 \sin \frac{1}{z} = z^6 \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{3!} \frac{1}{z^3} + \dots \right) = z^5 - \frac{1}{3!} z^3 + \frac{1}{5!} z - \frac{1}{7!} \frac{1}{z} + \dots,$$

где бесконечно много слагаемых в главной части. А так как знаменатель $f(z)$ – аналитическая, отличная от нуля при $|z| < 1$ функция, то $z = 0$ – с.о.т. $f(z)$.

Для исследования характера точки $z = \infty$ совершим замену $z = \frac{1}{\zeta}$ и перейдём к рассмотрению в окрестности точки

$$\zeta = 0 \quad \text{функции} \quad f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\sin \zeta}{\zeta^2 (\zeta^2 + 1)^2} \sim \frac{1}{\zeta}. \quad \text{Очевидно,}$$

она имеет в нуле простой полюс. Точно ту же особенность имеет в бесконечности функция $f(z) \triangleleft$

22.4. Вопросы и задачи

1. Проверьте, что доказательства теорем 22.1–22.4 проходят с необходимыми изменениями для случая особой точки $z_0 = \infty$.

2. Найдите особые точки (включая $z = \infty$) функции $f(z)$ и определите их характер, если

$$a) f(z) = \frac{1}{z^2} \cdot e^z + \frac{1}{z-1}; \quad b) f(z) = \frac{\sin z}{z^2 - \pi^2};$$

$$c) f(z) = e^{\operatorname{ctg} z - \frac{1}{z}}; \quad d) f(z) = \frac{1 - \cos z}{\sin^2 z};$$

$$e) f(z) = \frac{z}{(e^z + 2)^2 (z^2 + 4)}; \quad f) f(z) = \frac{\operatorname{ch} z - 1}{z \cdot (z^2 + 9)^2};$$

$$g) f(z) = z^3 + \frac{z}{\sin \frac{1}{z}}; \quad h) f(z) = e^{\frac{1}{z-i}} \left(1 + \sin \frac{\pi i z}{2}\right)^{-1}.$$

3. Известно, что для функции $f(z)$ не существует $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ (ни конечный, ни бесконечный). Следует ли отсюда, что z_0 – существенно особая точка $f(z)$?

4. Определите характер точки z_0 для функции $f'(z)$, если функция $f(z)$, аналитическая в $K = \{0 < |z - z_0| < R\}$, имеет в точке z_0 :

a) устранимую особенность; b) полюс порядка k ;
c) существенную особенность.

5. Функция $g(z)$ имеет в точке z_0 устранимую особенность. Определите характер этой точки для функции $f(z)$, если

$$a) f(z) = (g(z))^2; \quad b) f(z) = \sin(g(z)); \quad c) f(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

6. Функция $g(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс. Определите характер этой точки для функции $f(z)$, если

$$a) f(z) = (g(z))^3; \quad b) f(z) = e^{g(z)}; \quad c) f(z) = \frac{1}{g(z)}.$$

7. Известно, что z_0 – существенно особая точка функции $g(z)$. Следует ли отсюда, что z_0 – существенно особая точка $f(z) = \frac{1}{g(z)}$?

8. Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична в области $K = \{z : 0 < |z - z_0| < r\}$ и для всех $z \in K$ выполнено неравенство $|f(z)| \leq \frac{M}{\sqrt{|z - z_0|}}$, где $M > 0$. Докажите, что если z_0 – особая точка функции $f(z)$, то это устранимая особая точка.

9. Функция $f(z)$ имеет в точке z_0 одну из следующих особенностей: а) устранимую; б) полюс; в) существенную особенность. Функция $g(z)$ также имеет в точке z_0 особенность одного из этих трех типов. Определите характер точки z_0 для функций а) $f(z) + g(z)$; б) $f(z) \cdot g(z)$.

10. Докажите, что если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ устранимую особенность, то $f(z)$ – постоянная.

11. Докажите, что если целая функция $f(z)$ имеет в точке $z = \infty$ полюс, то $f(z)$ – полином.

Глава 6

Теория вычетов и ее применение

§23. Вычеты и их вычисление

23.1. Понятие вычета

Пусть $f(z)$ — однозначная функция, аналитическая в некоторой проколотой окрестности $\mathcal{K}$ точки z_0 .

Определение. Вычетом $f(z)$ относительно z_0 называется число

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz, \quad (1)$$

где $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, $\gamma \subset \mathcal{K}$, замкнутый контур γ положительно ориентирован относительно области, содержащей точку z_0 .

Теорема 23.1. 1) Если $z_0 \neq \infty$, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = c_{-1}$,

где c_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z - z_0}$ лорановского разложения $f(z)$ в $\mathcal{K} = \{0 < |z - z_0| < R\}$;

2) если $z_0 = \infty$, то $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = -c_{-1}$, где c_{-1} — коэффициент при $\frac{1}{z}$ разложения в ряд Лорана $f(z)$ в $\mathcal{K} \equiv \mathcal{K}_{\infty} = \{B < |z| < +\infty\}$.

▷ 1) В силу теоремы Лорана в $\mathcal{K}$ $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n$,

где $c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$, откуда при $n = -1$ полу-

чаем утверждение теоремы.

2) Разложение $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности бесконечно удаленной точки имеет вид $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n$, $z \in \mathcal{K}$.

Известно, что $\oint_{\Gamma} z^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1, \\ 2\pi i, & n = -1. \end{cases}$ Здесь Γ — произвольный замкнутый контур, ориентированный против часовой стрелки, который содержит внутри точку $z = 0$. В частности, $\Gamma = \gamma^{-1}$, где γ — контур из определения вычета (почему изменено направление кривой?)

Тогда, используя возможность почленного интегрирования ряда Лорана, получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} f(z) dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} f(z) dz = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n z^n \right) dz = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \left(\oint_{\Gamma} z^n dz \right) = -c_{-1} \end{aligned}$$

Замечание. Определение вычета применимо и по отношению к правильной или устранимой особой точке z_0 . При этом в случае $z_0 \neq \infty$ обязательно $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = 0$.

Если же $z_0 = \infty$, то может быть $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) \neq 0$, поскольку здесь c_{-1} — коэффициент из правильной части лорановского разложения.

23.2. Способы вычисления вычетов

Утверждение 1. Пусть $z_0 \neq \infty$ — простой полюс $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z - z_0)). \quad (2)$$

▷ В соответствии с определением простого полюса, в проколотой окрестности $\mathcal{K}$ функция $f(z)$ имеет представление

$$f(z) = \frac{c_{-1}}{z - z_0} + c_0 + c_1(z - z_0) + \dots, \quad \text{где } c_{-1} \neq 0,$$

т.е. $f(z)(z-z_0) = c_{-1} + c_0(z-z_0) + c_1(z-z_0)^2 + \dots$

Степенной ряд в правой части последнего равенства представляет собой аналитическую, следовательно, непрерывную в окрестности z_0 функцию. Поэтому существует ее предел при $z \rightarrow z_0$, равный c_{-1} . Значит, существует и предел $\lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z-z_0)) = c_{-1}$ $\triangleleft$

Утверждение 2. Пусть $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, где $\varphi(z), \psi(z) \in \mathcal{A}(z_0)$, причём $\varphi(z_0) \neq 0, \psi(z_0) = 0, \psi'(z_0) \neq 0$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}. \quad (3)$$

$\triangleright$ В условиях утверждения функция $f(z)$ имеет в точке z_0 простой полюс, поэтому, применяя формулу (2), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=z_0} f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)(z-z_0)}{\psi(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\varphi(z)}{\frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{\psi(z)-\psi(z_0)}{z-z_0}} = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)} \end{aligned}$$

(почему справедлив переход к отношению пределов?) $\triangleleft$

Утверждение 3. Пусть $z_0 \neq \infty$ — полюс порядка k функции $f(z)$. Тогда

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)}. \quad (4)$$

$\triangleright$ Так как в кольце $\mathcal{K}$ имеет место представление

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{(z-z_0)^k} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-z_0} + c_0 + c_1(z-z_0) + \dots, \text{ где } c_{-k} \neq 0,$$

то

$$f(z)(z-z_0)^k = c_{-k} + \dots + c_{-1}(z-z_0)^{k-1} + c_0(z-z_0)^k + \dots,$$

откуда после $(k-1)$ -кратного дифференцирования получаем

$$(f(z)(z-z_0)^k)^{(k-1)} = (k-1)! c_{-1} + k(k-1) \dots 2 \cdot c_0(z-z_0) + \dots$$

и далее рассуждениями, аналогичными тем, что завершали доказательство утверждения 1, — формулу (4) $\triangleleft$

Замечания. 1) Если z_0 — существенно особая точка $f(z)$, то для вычисления вычета следует либо непосредственно находить коэффициент c_{-1} ряда Лорана, либо использовать теорему о полной сумме вычетов (см. ниже).

2) Для нахождения вычета в бесконечно удалённой точке можно применять те же приемы. Полезно также иметь в виду следующий факт.

Утверждение 4. Пусть точка $z_0 = \infty$ — нуль порядка $k \geq 2$ функции $f(z)$. Тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

$\triangleright$ Условие на характер точки $z_0 = \infty$ означает, что (см. п. 19.1) $f(z) = \frac{1}{z^k} \cdot f_1(z)$, где $f_1(z)$ аналитична в некоторой окрестности бесконечно удалённой точки, причём $f_1(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} f_1(z) \neq 0$. Поэтому для функции $f(z)$ в $\mathcal{K}_\infty$ имеем

$$f(z) = \frac{c_{-k}}{z^k} + \frac{c_{-k-1}}{z^{k+1}} + \dots, \quad k \geq 2,$$

откуда и следует $c_{-1} = 0$ $\triangleleft$

23.3. Теорема о полной сумме вычетов

Теорема 23.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, \dots, z_n$. Тогда

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0. \quad (5)$$

$\triangleright$ Из условия следует, что $z_1, z_2, \dots, z_n$ — изолированные особые точки $f(z)$. Пусть число $R > \max_k |z_k|$, тогда внутри

окружности $\Gamma_R : |z| = R$ найдется такая система непересекающихся контуров $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n \subset \text{int } \Gamma_R$, что $z_k \in \text{int } \gamma_k \forall k$ (рис. 73). По интегральной теореме Коши для многосвязной области (п. 13.2) получаем

$$\oint_{\Gamma_R} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz,$$

где все кривые ориентированы против часовой стрелки.

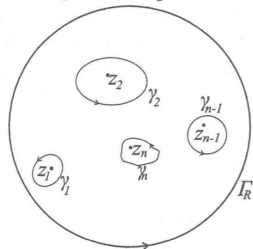


Рис. 73

Таким образом,

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz - \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_k} f(z) dz \right) + \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R^{-1}} f(z) dz = 0.$$

Теперь остается только учесть определение вычета (1), а также заметить, что поскольку в области $|z| > R$ не может быть других особых точек, кроме бесконечно удаленной, то

$$\text{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_R^{-1}} f(z) dz \quad \triangleleft$$

Замечание. В формуле (5) вычет в $z_0 = \infty$ участвует всегда, независимо от того, имеет ли $f(z)$ особенность в этой точке.

23.4. Примеры

1) Найти вычеты $f(z)$ во всех изолированных особых точках (включая точку $z = \infty$):

- a) $f(z) = \frac{1}{z}$; b) $f(z) = z^2 + 3iz - 7$;
 c) $f(z) = \frac{1}{(z^2 + 4)^2}$; d) $f(z) = \text{tg } z$;
 e) $f(z) = \frac{i}{z^4} \sin z$; f) $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)^3}$;
 g) $f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{e^z + 2}$; h) $f(z) = e^{z + \frac{1}{z}}$;
 i) $f(z) = \sin \left(z e^{z^2} \right) \cdot \sin \frac{1}{z}.$

▷ a) Особые точки данной функции: $z_0 = 0$ – простой полюс и $z = \infty$ – устранимая особая точка (после доопределения по непрерывности – это нуль первого порядка). Вид $f(z)$ совпадает с её рядом Лорана по степеням z . Поэтому $\text{res}_{z=0} f(z) = 1$; $\text{res}_{z=\infty} f(z) = -1$.

b) Точка $z = \infty$ – полюс второго порядка $f(z)$. Многочлен по степеням z , совпадающий с его лорановским разложением в окрестности бесконечно удаленной точки, не содержит слагаемого вида $\frac{1}{z}$, так что $\text{res}_{z=\infty} f(z) = 0$.

c) Точки $z = \pm 2i$ – полюсы второго порядка $f(z)$, поэтому для вычисления вычетов используем формулу (4):

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=2i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{(z-2i)^2}{(z^2+4)^2} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2i} \left(\frac{1}{(z+2i)^2} \right)' = \\ &= \frac{-2}{(z+2i)^3} \Big|_{z=2i} = -\frac{i}{32}. \end{aligned}$$

Аналогично для $z = -2i$ получаем $\text{res}_{z=-2i} f(z) = \frac{i}{32}$.

У.о.т. $z = \infty$ после доопределения по непрерывности – нуль

4-го порядка (так как $f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \frac{\zeta^4}{(1+4\zeta^2)^2}$ в окрестности $\zeta = 0$). В соответствии с утверждением 4, $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$.

Сравните полученные в а), б), в) результаты с утверждением теоремы 23.2.

д) Функция имеет простые полюсы в каждой из точек $z_k = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Воспользовавшись формулой (3),

$$\text{находим } \operatorname{res}_{z=z_k} \operatorname{tg} z = \frac{\sin z_k}{-\sin z_k} = -1.$$

Точка $z = \infty$ является неизолированной особой точкой $f(z)$, поэтому понятие вычета для неё не имеет смысла.

е) Особые точки: $z = 0$ – полюс 3-го порядка и $z = \infty$ – с.о.т. В области $0 < |z| < +\infty$ справедливо разложение $f(z)$ в ряд по степеням z :

$$f(z) = \frac{i}{z^4} \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots \right) = \frac{i}{z^3} - \frac{i}{3!}z + \frac{iz}{5!} - \dots,$$

$$\text{следовательно, } \operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\frac{i}{6}; \quad \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{i}{6}.$$

ф) Особые точки функции: $z = 0$ – простой полюс, $z = -1$ – полюс 3-го порядка и $z = \infty$ – с.о.т.

$$\text{По формуле (2) } \operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{e^z}{(z+1)^3} \Big|_{z=0} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Согласно (4) } \operatorname{res}_{z=-1} f(z) &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow -1} ((z+1)^3 f(z))'' = \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{e^z}{z} \right)'' \Big|_{z=-1} = \frac{1}{2} \frac{e^z}{z^3} (z^2 - 2z + 2) \Big|_{z=-1} = -\frac{5}{2e}. \end{aligned}$$

$$\text{Наконец, по формуле (5) находим: } \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{5}{2e} - 1.$$

г) Особыми точками функции $f(z)$ являются простые полюсы $z_k = \operatorname{Ln}(-2) = \ln 2 + i\pi(1+2k)$, $k \in \mathbb{Z}$; $z = \infty$ – неизолированная особая точка.

В соответствии с формулой (3) при любом k

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{e^{2z} - 1}{(e^z + 2)'} \Big|_{z=z_k} = \frac{e^{2z_k} - 1}{e^{z_k}} = \frac{(-2)^2 - 1}{-2} = -\frac{3}{2}.$$

h) Функция имеет две существенно особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Для вычисления вычетов рассмотрим разложение $f(z)$ в ряд Лорана в области $0 < |z| < +\infty$ как произведение рядов для e^z и $e^{\frac{1}{z}}$:

$$f(z) = e^z + \frac{1}{z} = e^z \cdot e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{z^k} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n! k!} z^{n-k}.$$

При $n-k = -1$, т.е. $k = n+1$, получаем выражение искомого вычета как коэффициента $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = c_{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n! (n+1)!}$.

$$\text{Вычет } \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = -c_{-1}.$$

и) Эта функция также имеет две существенно особые точки: $z = 0$ и $z = \infty$. Поскольку $f(z)$ – четная функция, её разложение в ряд Лорана в области $0 < |z| < +\infty$ содержит только четные степени z (см. задачу 6 п. 21.4). Поэтому

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = -\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = c_{-1} = 0 \quad \triangleleft$$

2) Найти вычеты каждой из однозначных ветвей функции $F(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z+1}}$ относительно точки $z_0 = 1$.

▷ $F(z)$ имеет две однозначные ветви, соответствующие двум различным значениям квадратного корня:

$$f_1(z) = \frac{1}{\sqrt{2-z+1}} \quad \text{и} \quad f_2(z) = \frac{1}{-\sqrt{2-z+1}} \quad (\text{здесь через } \sqrt{a} \text{ обозначено главное значение квадратного корня из числа } a).$$

Поскольку $f_1(1) = \frac{1}{2}$, точка $z_0 = 1$ является для этой ветви правильной, значит, $\operatorname{res}_{z=1} f_1(z) = 0$.

Для второй ветви получаем $f_2(z) = \frac{\sqrt{2-z}+1}{z-1}$, откуда следует, что точка $z_0 = 1$ — простой полюс. Тогда по формуле (2) имеем $\operatorname{res}_{z=1} f_2(z) = 2$ $\triangleleft$

3) Найти главную часть ряда Лорана функции $f(z) = \frac{z \cos 2z}{(z+2)^2}$ в окрестности точки $z_0 = -2$.

$\triangleright$ Точка $z_0 = -2$ — полюс второго порядка $f(z)$, поэтому главная часть ряда Лорана имеет вид $\frac{c_{-2}}{(z+2)^2} + \frac{c_{-1}}{z+2}$.

Таким образом, $c_{-2} = \lim_{z \rightarrow -2} f(z) (z+2)^2 = -2 \cos 4$,

$$c_{-1} = \operatorname{res}_{z=-2} f(z) = (z \cos 2z)' \Big|_{z=-2} = \cos 4 - 4 \sin 4 \quad \triangleleft$$

23.5. Вопросы и задачи

1. Может ли вычет в устранимой особой точке быть отличным от нуля?
2. Может ли вычет в простом полюсе быть равным нулю?
3. Разложение функции $f(z)$ в $\{0 < |z| < R\}$ имеет вид $f(z) = c_1 z + c_0 + \frac{c_{-1}}{z} + \frac{c_{-2}}{z^2} + \dots$. Найдите $\operatorname{res}_{z=0} f^2(z)$.
4. Верно ли равенство $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} f\left(\frac{1}{z}\right)$?
5. Пусть существует конечный предел $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = f(\infty)$. Докажите, что тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \lim_{z \rightarrow \infty} z (f(\infty) - f(z))$.
6. Пусть $z = \infty$ — полюс порядка n функции $f(z)$. Докажите, что тогда $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \lim_{z \rightarrow \infty} (z^{n+2} f^{(n+1)}(z))$.

7. Найдите вычеты функции $f(z)$ во всех изолированных особых точках (включая $z_0 = \infty$), если

$$a) f(z) = \frac{2z^3}{z^4 + i}; \quad b) f(z) = \frac{\operatorname{ch} z}{(z^2 + \pi^2)^2};$$

$$c) f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z}; \quad d) f(z) = \frac{e^{-\frac{1}{z^2}}}{1 - z};$$

$$e) f(z) = \frac{1}{z^6} \operatorname{sh}^2 z + z \sin \frac{2}{z}; \quad f) f(z) = \frac{\sin^2 z}{z^5}.$$

8. Найдите вычеты каждой из однозначных ветвей функции $F(z) = \frac{\sqrt{z}}{(1-z)^2}$ относительно точки $z_0 = 1$.

9. Применяя различные методы, найдите вычет относительно точки $z_0 = \infty$ функции $f(z)$, если

$$a) f(z) = \frac{1 + z^8}{z^6 \cdot (z+2)}; \quad b) f(z) = \frac{2z^6 + i}{(z^2 + 4)(z^3 - 2i)};$$

$$c) f(z) = \cos \frac{z}{z-1}; \quad d) f(z) = \frac{\cos^2 \pi z}{1 + \frac{1}{z}};$$

$$e) f(z) = \frac{\sin z}{z^2 + 1}; \quad f) f(z) = z^2 \cos \frac{1}{z-1}.$$

10. Найдите $\operatorname{res}_{z=z_0} \frac{f'(z)}{f(z)}$, ($z_0 \neq \infty$), если

a) z_0 — нуль порядка n функции $f(z) \in \mathcal{A}(z_0)$;

b) z_0 — полюс порядка k функции $f(z)$.

11. Найдите главную часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0 , если

$$a) f(z) = \frac{e^z}{(z^2 - 1)^2}, z_0 = -1; \quad b) f(z) = \frac{z^3}{(z^2 + 1)^2}, z_0 = i;$$

$$c) f(z) = \frac{z}{\sin^2(z-1)}, z_0 = 1; \quad d) f(z) = \frac{e^z + 1}{(z^2 - 4)^2}, z_0 = 2.$$

§24. Основная теорема о вычетах.

Вычисление контурных интегралов с помощью вычетов

24.1. Основная теорема о вычетах

Теорема 24.1. Пусть γ — замкнутый контур, лежащий в области аналитичности однозначной функции $f(z)$, причём $f(z)$ аналитична внутри γ за исключением особых точек $z_1, \dots, z_n$. Тогда

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z). \quad (1)$$

▷ Обозначим $D = \operatorname{int} \gamma$. Поскольку каждая из z_k — изолированная особая точка, лежащая в D с целой окрестностью, найдется такая система непересекающихся замкнутых контуров $\{\gamma_k\}$, что $\forall k \ z_k \in \operatorname{int} \gamma_k, \operatorname{int} \gamma_k \subset D$ (рис. 74). Тогда для области $G = D \setminus \bigcup_{k=1}^n \overline{\operatorname{int} \gamma_k}$ имеем $f(z) \in \mathcal{A}(\overline{G})$. Поэтому по следствию из интегральной теоремы Коши 13.2, используя определение вычета (п. 23.1), получаем

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{\gamma_k} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z) \triangleleft$$

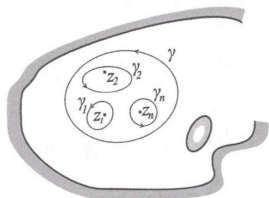


Рис. 74

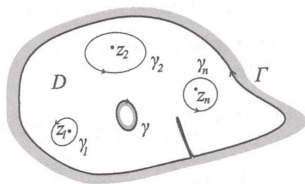


Рис. 75

Справедливо следующее обобщение теоремы 24.1, опирающееся на теорему 13.3:

Теорема 24.2. Пусть функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D и непрерывна в $D \cup \partial D$ ¹⁰ за исключением конечного числа особых точек $z_1, z_2, \dots, z_n \in D$. Тогда

$$\oint_{\partial D} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} f(z), \quad (2)$$

где кусочно-гладкая кривая ∂D — положительно ориентированная граница D .

Замечание. Область D может быть неодносвязной, граница может содержать разрезы (см. рис. 75).

24.2. Примеры

Вычислить контурный интеграл $I = \oint_{\gamma} f(z) dz$, если

a) $f(z) = \frac{\cos z}{z^3 + 1}, \quad \gamma: |z + 1| = 1;$

b) $f(z) = \cos z \cdot \cos \frac{1}{z}, \quad \gamma$ — контур прямоугольника с вершинами в точках $\pm 1, \pm i;$

c) $f(z) = \frac{\cos z}{z(z-1)(z-\frac{1}{2})^2 \dots (z-\frac{1}{100})^{100}}, \quad \gamma: |z| = \frac{3}{4}.$

▷ a) Функция $f(z) = \frac{\cos z}{z^3 + 1}$ имеет в конечной части комплексной плоскости три простых полюса $z = \sqrt[3]{-1}$, лишь один из которых $z = -1 \in \operatorname{int} \gamma$. Поэтому по теореме 24.1

$$I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=-1} f(z) = 2\pi i \cdot \frac{\cos z}{3z^2} \Big|_{z=-1} = \frac{2\pi i}{3} \cos 1.$$

b) Функция $f(z) = \cos z \cdot \cos \frac{1}{z}$ аналитична внутри контура γ за исключением существенно особой точки $z = 0$.

¹⁰ т.е. непрерывна в области вплоть до границы — см. комментарий к теореме 13.3.

Для нахождения вычета в этой точке следует рассмотреть разложение $f(z)$ в ряд Лорана в проколотой окрестности точки $z = 0$. Поскольку в разложениях в ряд по степеням z функций $\cos z$ и $\cos \frac{1}{z}$ присутствуют только четные степени z , то ряд Лорана $f(z)$ также содержит лишь четные степени z , так что $\operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$. Итак, $I = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=0} f(z) = 0$.

c) $f(z) = \frac{1}{z(z-1)\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(z-\frac{1}{100}\right)^{100}}$ имеет внутри контура $\gamma: |z| = \frac{3}{4}$ полюсы $z = 0, z = \frac{1}{2}, \dots, z = \frac{1}{100}$, а простой полюс $z = 1 \in \operatorname{ext} \gamma$. В силу теоремы 23.2

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) + \sum_{k=2}^{100} \operatorname{res}_{z_k=\frac{1}{k}} f(z) = -\left(\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)\right).$$

Так как $f(z) \sim \frac{1}{z^{1+1+2+\dots+100}}$ при $z \rightarrow \infty$, то $\operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$ (см. утверждение 4 п. 23.2). Вычислив

$$\begin{aligned} \operatorname{res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{z\left(z-\frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(z-\frac{1}{100}\right)^{100}} \Big|_{z=1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^2 \dots \left(\frac{99}{100}\right)^{100}} = \\ &= \frac{2^2 \cdot 3^3 \dots 100^{100}}{1^2 \cdot 2^3 \dots 99^{100}} = \frac{100^{100}}{99!}, \end{aligned}$$

получаем

$$I = -2\pi i \cdot \left(\operatorname{res}_{z=1} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)\right) = -2\pi i \frac{100^{100}}{99!} \quad \triangleleft$$

24.3. Собственные интегралы $\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$

Для вычисления интеграла такого типа, где $R(\cos \varphi, \sin \varphi)$ — рациональная функция, производится замена $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Используя формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z}\right), \quad \sin \varphi = \frac{1}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right),$$

приходим к интегралу от некоторой рациональной функции $R_1(z)$ по единичной окружности $\gamma: |z| = 1$.

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 + a \sin \varphi}$, где $-1 < a < 1$.

▷ После замены $z = e^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; 2\pi]$, $d\varphi = \frac{dz}{iz}$, получаем

$$I = \oint_{\gamma} \frac{dz}{iz \left(1 + \frac{a}{2i} \left(z - \frac{1}{z}\right)\right)} = 2 \cdot \oint_{\gamma} \frac{dz}{az^2 + 2iz - a}.$$

Корнями уравнения $az^2 + 2iz - a = 0$, $a \neq 0$, являются числа $z_{1,2} = \frac{i}{a} (-1 \pm \sqrt{1 - a^2})$ — простые полюсы

функции $f(z) = \frac{1}{az^2 + 2iz - a}$. Нетрудно выяснить, что $z_1 = \frac{i}{a} (-1 + \sqrt{1 - a^2}) \in \operatorname{int} \gamma$, в то время как $z_2 = \frac{i}{a} (-1 - \sqrt{1 - a^2}) \in \operatorname{ext} \gamma$. Поэтому, вычислив

$\operatorname{res}_{z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{z - z_1}{a(z - z_1)(z - z_2)} = \frac{1}{a(z_1 - z_2)} = \frac{1}{2i\sqrt{1 - a^2}}$,
по теореме 24.1 имеем

$$I = 2 \cdot 2\pi i \operatorname{res}_{z_1} f(z) = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}.$$

Осталось заметить, что полученный результат справедлив и при $a = 0$ $\triangleleft$

Указанный выше алгоритм можно реализовать в общем случае так же, как это делалось при рассмотрении примера. В результате получаем

Утверждение.

$$\int_0^{2\pi} R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi = 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname{res}_{z_k} R_1(z),$$

где $R_1(z) = \frac{1}{iz} \cdot R\left(\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right)$, а суммирование идёт по всем особым точкам z_k рациональной функции $R_1(z)$, находящимся внутри окружности $|z| = 1$.

24.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите следующие интегралы (замкнутые контуры положительно ориентированы):

a) $\oint_{\gamma} z \operatorname{ctg} z \, dz$, $\gamma: |z| = 4$; b) $\oint_{\gamma} z^4 \sin \frac{1}{z} \, dz$, $\gamma: |z| = 1$;

c) $\oint_{\gamma} \operatorname{th}(\pi z) \, dz$, $\gamma: |z| = n$, $n \in \mathbb{N}$;

d) $\oint_{\gamma} \frac{\sin \frac{1}{z^2}}{z^2 - 1} \, dz$, $\gamma: \left|z + \frac{3}{2}\right| = 1$;

e) $\oint_{\gamma} \frac{e^{\pi z}}{z^4 + 2z^2 + 1} \, dz$, $\gamma: |z + i| = 1$;

f) $\oint_{\gamma} \frac{\cos \frac{1}{z}}{(z^3 + 1)^3(z - 3)} \, dz$, $\gamma: |z| = 2$;

g) $\oint_{\gamma} \frac{e^z - 1}{e^z + 2} \, dz$, $\gamma: |z - 1 + i\pi| = 1$;

h) $\oint_{\gamma} \frac{z^7}{3z^8 + 1} \, dz$; $\oint_{\gamma} \frac{z^5}{3z^8 + 1} \, dz$, $\gamma: |z| = 1$;

i) $\oint_{\gamma} \frac{z^5 - 3iz + 2}{(2z - i)^{2018}} \, dz$, γ — граница квадрата с вершинами в $z = \pm 1$, $z = \pm i$;

j) $\oint_{\gamma} \sin \frac{z}{z + 1} \, dz$, $\gamma: |z + 2| = 2$;

k) $\oint_{\gamma} z^5 \cdot \sin \frac{2}{z} \cdot \cos \frac{z}{z^2 + 4} \, dz$, $\gamma: |z - 1| = 2$.

2. Найдите значение a , при котором однозначна в области $D = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция $F(z) = \int_{z_0}^z e^{\zeta} \cdot \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{a}{\zeta^3}\right) d\zeta$ (здесь $z, z_0 \in D$).

3. Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов:

a) $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{5 - 4 \cos \varphi}$; b) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{d\varphi}{4 - \sin 2\varphi}$;

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos x + 1}{\sin x + 2} \, dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5 + 2 \cos^2 x}$;

e) $\int_0^{\pi} \frac{d\varphi}{1 + \sin^2 \varphi}$; f) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{1 - 2a \cos \varphi + a^2}$ ($0 < a < 1$);

g) $\int_0^{\pi} \frac{\sin^2 x}{5 + 3 \cos x} \, dx$; h) $\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{(a + b \cos \varphi)^2}$ ($0 < b < a$).

§25. Применение теории вычетов к вычислению несобственных интегралов

25.1. Несобственные интегралы вида $\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \, dx$

Лемма 1. Пусть $\overline{D} = \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \cap \{|z| \geq R_0\}$, $C_R = \{|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$, функция $F(z)$ непрерывна в $\overline{D}$. Если $M_F(R) \equiv \max_{z \in C_R} |F(z)| = o\left(\frac{1}{R}\right)$ при $R \rightarrow +\infty$, то $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(z) \, dz = 0$.

▷ Преобразуем данный интеграл, имея в виду, что $z \in C_R \Leftrightarrow z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; \pi]$:

$$\int_{C_R} F(z) \, dz = \int_0^{\pi} F(Re^{i\varphi}) i Re^{i\varphi} d\varphi.$$

Поэтому

$$\left| \int_{C_R} F(z) dz \right| \leq \int_0^\pi |F(Re^{i\varphi})| R d\varphi \leq M_F(R) \cdot R\pi = o(1) \rightarrow 0,$$

$$\text{так как } |F(Re^{i\varphi})| \leq M_F(R) = o\left(\frac{1}{R}\right) \text{ при } R \rightarrow +\infty \quad \triangleleft$$

Теорема 25.1. Пусть функция $F(z)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, не лежащих на действительной прямой, и $M_F(R) = o\left(\frac{1}{R}\right)$ при $R \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z) \quad (1)$$

(интеграл в левой части существует, вообще говоря, в смысле главного значения).

▷ Возьмём такое значение R_0 , что $\forall k \quad |z_k| < R_0$, и рассмотрим замкнутый контур γ_R , $R > R_0$, состоящий из отрезка вещественной прямой $[-R, R]$, замыкаемого дугой полуокружности $C_R = \{|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ через верхнюю полуплоскость (см. рис. 76). В соответствии с теоремой 24.1

$$\oint_{\gamma_R} F(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z). \quad (2)$$

Заметив, что интеграл в левой части (2), значение которого не меняется при изменении $R > R_0$, равен сумме

$$\int_{-R}^R F(x) dx + \int_{C_R} F(z) dz,$$

перейдем в (2) к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Правая часть постоянна; согласно лемме 1, существует $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(z) dz = 0$.

Значит, существует $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R F(x) dx = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$,

представляющий собой искомый несобственный интеграл (он имеет лишь особенности первого рода). Таким образом приходим к равенству (1) $\triangleleft$

Следствие 1. Пусть $F(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ — многочлены степеней m и n соответственно, $n - m \geq 2$, и пусть $Q_n(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname{res}_{z_k} F(z), \quad (3)$$

где $\{z_k\}$ — все особые точки рациональной функции $F(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости.

▷ Несобственный интеграл 1-го рода в (3) сходится в силу условия $n - m \geq 2$. Функция $F(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ удовлетворяет требованиям теоремы 25.1. В частности, если $P_m(z) = a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + \dots + a_m$ и $Q_n(z) = b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \dots + b_n$ ($a_0 \cdot b_0 \neq 0$), то при $z \in C_R$ для достаточно больших значений $R > 0$ справедлива оценка

$$|F(z)| = \left| \frac{P_m(z)}{Q_n(z)} \right| \leq \frac{|a_0| R^m + |a_1| R^{m-1} + \dots + |a_m|}{|b_0| R^n - (|b_1| R^{n-1} + \dots + |b_n|)} \sim \frac{|a_0|}{|b_0| R^{n-m}}$$

при $R \rightarrow +\infty$, откуда следует $M_F(R) = O\left(\frac{1}{R^{n-m}}\right) \triangleleft$

Замечания.

1) Коэффициенты $P_m(z)$ и $Q_n(z)$ не обязаны быть вещественными.

2) Для вычисления интеграла от рациональной функции, удовлетворяющей требованиям следствия 1, в формуле (3) можно использовать взятую со знаком минус сумму вычетов по всем особым точкам $F(z)$, находящимся в нижней полуплоскости (докажите самостоятельно).

Примеры. Вычислить интегралы

$$a) I = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx; \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - i}.$$

▷ a) Рассмотрим $F(z) = \frac{z^2}{z^4 + 1}$ — функцию, отвечающую условиям следствия 1. Четыре корня уравнения

$$z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \sqrt[4]{-1} = e^{\frac{i(\pi + 2\pi n)}{4}}, \quad n = 0, 1, 2, 3,$$

представляют собой простые полюсы $F(z)$, причем точки $z_1 = e^{\frac{\pi i}{4}}$, $z_2 = e^{\frac{3\pi i}{4}}$ расположены в верхней полуплоскости.

Учитывая чётность подынтегральной функции и формулу (3), имеем

$$I = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1} dx = \pi i \cdot \left(\operatorname{res}_{z_1} F(z) + \operatorname{res}_{z_2} F(z) \right).$$

Находим вычет

$$\operatorname{res}_{z_1} F(z) = \left. \frac{z^2}{(z^4 + 1)'} \right|_{z_1} = \left. \frac{1}{4z} \right|_{z_1} = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{\pi i}{4}} = \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 - i).$$

$$\text{Аналогично} \quad \operatorname{res}_{z_2} F(z) = \frac{1}{4} \cdot e^{-\frac{3\pi i}{4}} = -\frac{1}{4\sqrt{2}} (1 + i).$$

$$\text{Итак,} \quad I = \pi i \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}} (1 - i - 1 - i) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \quad \triangleleft$$

▷ b) Функция $F(z) = \frac{1}{z^3 - i}$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением трех простых полюсов $z = \sqrt[3]{i} = e^{i(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3})}$, $n = 0, 1, 2$, два из которых расположены в верхней полуплоскости, а один: $z_0 = -i$ — в нижней.

$$\text{Вычет} \quad \operatorname{res}_{z=-i} F(z) = \left. \frac{1}{(z^3 - i)'} \right|_{z=-i} = \left. \frac{1}{3z^2} \right|_{z=-i} = -\frac{1}{3}.$$

Теперь, имея в виду замечание 2, получаем

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 - i} = -2\pi i \operatorname{res}_{z=-i} F(z) = \frac{2\pi}{3} i \quad \triangleleft$$

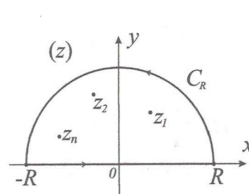


Рис. 76

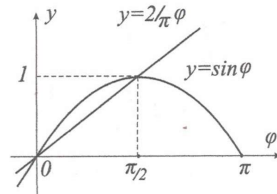


Рис. 77

25.2. Несобственные интегралы вида

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax dx \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax dx$$

Лемма 2 (Жордан). Пусть $a > 0$, $\overline{D} = \{\operatorname{Im} z \geq 0\} \cap \{|z| \geq R_0\}$, $C_R = \{|z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$. Если функция $f(z)$ непрерывна в $\overline{D}$ и $M_f(R) \equiv \max_{z \in C_R} |f(z)| = o(1)$ при

$$R \rightarrow +\infty, \quad \text{то} \quad \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0.$$

▷ Для $z \in C_R$ имеем $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0; \pi]$. Тогда $e^{iaz} = e^{iaR \cos \varphi} = e^{iaR (\cos \varphi + i \sin \varphi)} = e^{iaR \cos \varphi} \cdot e^{-aR \sin \varphi}$, значит, $|e^{iaz}| = |e^{iaR \cos \varphi}| \cdot |e^{-aR \sin \varphi}| = e^{-aR \sin \varphi}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |I_R| &= \left| \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz \right| \leq \int_0^\pi |f(Re^{i\varphi})| |e^{iaz}| R d\varphi \leq \\ &\leq R \cdot M_f(R) \cdot \int_0^\pi e^{-aR \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Оценим последний интеграл, используя симметрию графика функции $\sin \varphi$ относительно середины отрезка $0 \leq \varphi \leq \pi$ и неравенство $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$, справедливое при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ (см. рис. 77):

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^{-aR} \sin \varphi \, d\varphi &= 2 \int_0^{\pi/2} e^{-aR} \sin \varphi \, d\varphi \leq \\ &\leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2aR}{\pi} \varphi} \varphi \, d\varphi = \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}). \end{aligned}$$

Поэтому с учётом предыдущей оценки получаем

$$|I_R| \leq R \cdot M_f(R) \cdot \frac{\pi}{aR} (1 - e^{-aR}) = M_f(R) \cdot \frac{\pi}{a} (1 - e^{-aR}) = o(1),$$

т.е. $I_R \rightarrow 0$, когда $R \rightarrow +\infty$.

Теорема 25.2. Пусть $a > 0$, функция $f(z)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением конечного числа особых точек $z_1, \dots, z_n$, не лежащих на действительной прямой, и $M_f(R) = o(1)$ при $R \rightarrow +\infty$. Тогда для несобственных интегралов (существующих вообще говоря в смысле главного значения) справедливы равенства:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax \, dx = \operatorname{Re} A, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax \, dx = \operatorname{Im} A, \quad (4)$$

где

$$A = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} (f(z) e^{iaz}). \quad (5)$$

▷ Рассмотрим замкнутый контур $\gamma_R = [-R, R] \cup C_R$, состоящий из отрезка вещественной прямой и дуги полукруга радиуса R , чтобы все особые точки $\{z_k\}$ функции $F(z) = f(z) e^{iaz}$, находящиеся в верхней полуплоскости, попадали внутрь γ_R (рис. 76). К функции $F(z)$ применима теорема 24.1, поэтому

$$\oint_{\gamma_R} F(z) \, dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

Совершая предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ (так же, как в доказательстве теоремы 25.1) и используя лемму Жордана, приходим к выводу, что существует

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \, dx = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z) \equiv A.$$

С учетом формулы Эйлера это означает, что

$$v.p. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos ax \, dx + i \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \sin ax \, dx \right) = A,$$

откуда после отделения действительной и мнимой части получаются соотношения (4)–(5). ◁

Следствие 2. Пусть $a > 0$, $f(x) = \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, где $P_m(x)$ и $Q_n(x)$ – многочлены степеней m и n , причём $n - m \geq 1$, и пусть $Q_n(x) \neq 0$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \cos ax \, dx = \operatorname{Re} A, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} \sin ax \, dx = \operatorname{Im} A, \quad (6)$$

где

$$A = 2\pi i \cdot \sum_k \operatorname{res}_{z_k} \left(\frac{P_m(z)}{Q_n(z)} e^{iaz} \right), \quad (7)$$

а $\{z_k\}$ – все особые точки рациональной функции $f(z)$, находящиеся в верхней полуплоскости.

▷ Отметим, во-первых, что функция $f(z) = \frac{P_m(z)}{Q_n(z)}$ удовлетворяет требованиям, предъявляемым к $f(z)$ в условии теоремы 25.2.

Во-вторых, как следует из курса математического анализа, оба интеграла в (6) сходятся (в силу признака Дирихле). Поэтому имеют место равенства (6)–(7). ◁

Примеры. Вычислить интегралы

$$a) I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x+1}{x^2+4x+5} \sin 2x \, dx;$$

$$b) I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2+1} \, dx \quad (\text{интеграл Лапласа}).$$

▷ а) Функция $F(z) = \frac{z+1}{z^2+4z+5} e^{2zi}$ имеет два простых полюса в конечной части комплексной плоскости: $z_{1,2} = -2 \pm i$. Один из них, а именно $z_1 = -2 + i$, находится в верхней полуплоскости. Найдем вычет:

$$\operatorname{res}_{z=z_1} F(z) = \lim_{z \rightarrow z_1} F(z)(z - z_1) = \frac{z+1}{z-z_2} e^{2zi} \Big|_{z=z_1} = \frac{i-1}{2i} \cdot e^{-2-4i}.$$

Поэтому

$$A = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_1} F(z) = \frac{\pi}{e^2} (i-1) e^{-4i} = \frac{\pi}{e^2} (i-1) (\cos 4 - i \sin 4).$$

Следовательно, согласно (6) получаем

$$I = \operatorname{Im} A = \frac{\pi}{e^2} (\cos 4 + \sin 4) \quad \triangleleft$$

▷ б) Данный интеграл в силу чётности косинуса можно переписать в виде $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos |\lambda|x}{x^2+1} \, dx$.

$$\text{При } \lambda = 0 \text{ получаем } I(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi.$$

Теперь достаточно рассмотреть случай $\lambda > 0$. Функция $F(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{z^2+1}$ имеет в верхней полуплоскости простой полюс

$$z_0 = i. \text{ Вычет } \operatorname{res}_{z=z_0} F(z) = \frac{e^{i\lambda z}}{(z^2+1)'} \Big|_{z=i} = \frac{e^{i\lambda z}}{2z} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-\lambda}}{2i}$$

и в соответствии с (6)–(7) получим

$$I(\lambda) = \operatorname{Re} \left(2\pi i \operatorname{res}_{z=i} F(z) \right) = \pi e^{-\lambda}.$$

Итак, окончательно, учитывая чётность по λ , имеем

$$I(\lambda) = \pi e^{-|\lambda|} \quad \triangleleft$$

25.3. Интегралы с особенностями 2-го рода

Одним из условий основной теоремы о вычетах является требование отсутствия особых точек функции на контуре интегрирования. Как же быть, если к вычислению предлагается несобственный интеграл с особенностью 2-го рода? Ответ прост: следует взять контур, обходящий особую точку, а затем в результате предельного перехода (и соответствующей деформации кривой) получить искомым интеграл. Эта процедура использована при доказательстве следующего утверждения.

Теорема 25.3. Пусть функция $F(z)$ аналитична в замкнутой полуплоскости $\{\operatorname{Im} z \geq 0\}$ за исключением конечного числа особых точек $\{z_k\}$, $\operatorname{Im} z_k > 0$, $1 \leq k \leq n$, и конечного числа простых полюсов $x_1, \dots, x_m$, лежащих на действительной прямой; пусть также $\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} F(z) \, dz = 0$, где $C_R = \{z \mid |z| = R, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$. Тогда

$$\text{в.р. } \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \, dx = 2\pi i \left(\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^m \operatorname{res}_{x_k} F(z) \right). \quad (8)$$

▷ Не умаляя общности, ограничимся изучением случая, когда $F(z)$ имеет на вещественной прямой единственную особую точку – простой полюс $z = a$. Выбрав такое значение R_0 , что $|z_k| < R_0$, такое число ρ_0 , что $0 < \rho_0 < |z_k - a|$ ($1 \leq k \leq n$), рассмотрим замкнутый контур $\gamma_{R,\rho}$, где $R > R_0$, $0 < \rho < \rho_0$, состоящий из отрезков вещественной прямой $[-R, a - \rho]$ и $[a + \rho, R]$, а также двух дуг $-C_R$ и $C_\rho = \{z \mid |z - a| = \rho, 0 \leq \arg z \leq \pi\}$ (рис. 78). По теореме 24.1

$$\oint_{\gamma_{R,\rho}} F(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z) \Leftrightarrow$$

$$\int_{-R}^{a-\rho} F(x) dx + \int_{a+\rho}^R F(x) dx + \int_{C_\rho} F(z) dz + \int_{C_R} F(z) dz =$$

$$= 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z). \quad (9)$$

Совершим в полученном равенстве предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0+$. Правая часть в (9) постоянна, а последний интеграл в левой части, согласно условию, имеет равный нулю предел. Для оценки третьего интеграла заметим, что в окрестности простого полюса $z = a$ функция имеет вид $F(z) = \frac{g(z)}{z-a}$, $g(z) \in \mathcal{A}(a)$, $g(a) \neq 0$. Поэтому для $z \in C_\rho$, т.е. при $z = a + \rho e^{i\varphi}$, имеем

$$\lim_{\rho \rightarrow 0+} \int_{C_\rho} F(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0+} \int_{\pi}^0 \frac{g(a + \rho e^{i\varphi})}{\rho e^{i\varphi}} \rho e^{i\varphi} i d\varphi =$$

$$= - \lim_{\rho \rightarrow 0+} \int_0^\pi g(a + \rho e^{i\varphi}) i d\varphi = -i \int_0^\pi \lim_{\rho \rightarrow 0+} g(a + \rho e^{i\varphi}) d\varphi =$$

$$= -i \int_0^\pi g(a) d\varphi = -\pi i g(a) = -\pi i \operatorname{res}_a F(z).$$

Таким образом, существует предел при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0+$ суммы первых двух интегралов в левой части (9), равный по определению $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx$, так что в итоге (9) превращается в равенство

$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx - \pi i \operatorname{res}_a F(z) = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z_k} F(z).$$

В общем случае это и означает (8) $\triangleleft$

Замечание. Несобственный интеграл второго рода в утверждении теоремы 25.3 существует *только* в смысле главного значения, в обычном смысле он расходится.

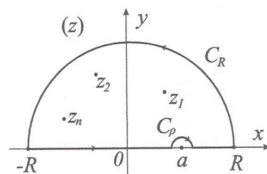


Рис. 78

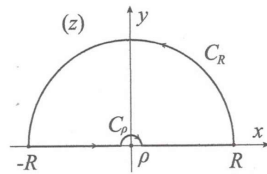


Рис. 79

Примеры.

Вычислить интегралы

$$a) I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x-1)(x^4+1)} dx; \quad b) I_2 = v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{x^3+8} dx.$$

$\triangleright$ а) Особыми точками функции $F(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z^4+1)}$ являются нули знаменателя: $z_0 = 1$ и $z_{1-4} = \sqrt[4]{-1}$, это все простые полюсы, причём только точки $z_1 = e^{\frac{\pi}{4}i}$ и $z_2 = e^{\frac{3\pi}{4}i}$ находятся в верхней полуплоскости.

Найдём вычеты, используя различные приемы:

$$\operatorname{res}_{z=z_0} F(z) = \lim_{z \rightarrow 1} F(z)(z-1) = \frac{z^2}{z^4+1} \Big|_{z=1} = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{res}_{z=z_1} F(z) = \frac{z^2}{(z^4+1)'} \Big|_{z=z_1} = \frac{z^2}{4z^3(z-1)} \Big|_{z=z_1} = \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i} - 1}.$$

Аналогично $\operatorname{res}_{z=z_2} F(z) = \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{e^{\frac{3\pi}{4}i} - 1}.$

Поэтому в соответствии с формулой (8)

$$I_1 = 2\pi i \left(\frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i} - 1} + \frac{1}{4} \frac{e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{e^{\frac{3\pi}{4}i} - 1} + \frac{1}{4} \right) = \\ = \frac{i\pi}{2} \left(\frac{e^{-\frac{\pi}{4}i} + e^{-\frac{3\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i} + e^{\frac{3\pi}{4}i}} + 1 \right) = \frac{i\pi}{2} \left(\frac{-2i \sin \frac{\pi}{4}}{2i \sin \frac{\pi}{4}} + 1 \right) = 0.$$

b) Рассмотрим функцию $F(z) = \frac{e^{2iz}}{z^3 + 8}$, которая имеет простые полюсы в точках $z_0 = -2$ и $z_{1,2} = 1 \pm i\sqrt{3}$. Здесь $\text{Im } z_1 > 0$.

$$\text{Так как } \text{res}_{z=z_k} F(z) = \frac{e^{2iz}}{3z^2} \Big|_{z_k}, \text{ то } \text{res}_{z=z_0} F(z) = \frac{e^{-4i}}{12},$$

$$\text{res}_{z=z_1} F(z) = -\frac{e^{2(-\sqrt{3}+i)}}{6(1-i\sqrt{3})} = -\frac{e^{-2\sqrt{3}}}{24} e^{2i}(1+i\sqrt{3}).$$

Поэтому согласно (8) имеем $v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2ix}}{x^3 + 8} dx =$
 $= \frac{\pi i}{12} (e^{-4i} - e^{-2\sqrt{3}}(\cos 2 + i \sin 2)(1 + i\sqrt{3})) \equiv A,$
 следовательно,

$$I_2 = \text{Im } A = \frac{\pi}{12} (\cos 4 - e^{-2\sqrt{3}}(\cos 2 - \sqrt{3} \sin 2)) \quad \triangleleft$$

25.4. Вопросы и задачи

1. Вычислите с помощью вычетов интегралы от рациональных функций:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2}{x^4 + 10x^2 + 9} dx; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(x^2 + 4a^2)^2} \quad (a > 0);$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 - 2x + 10)^2}; \quad d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x^2 + 13}{x^4 + 13x^2 + 36} dx;$$

$$e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^3 + 8i}; \quad f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{(x + 2i)^6} dx;$$

$$g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 - ix - 1)}.$$

2. Вычислите следующие интегралы:

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - 1}{x^2 - 4x + 5} \cos 3x dx; \quad b) \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^2 + 4} \sin 2x dx;$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 3x}{(x^2 - 2x + 10)^2} dx; \quad d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{(x^2 + 4x + 5)^2} dx;$$

$$e) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin(x - 2)}{x^2 + 2} dx; \quad f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(3 - 8x)}{4x^2 - 7x + 5} dx.$$

3. Вычислите интегралы (понимаемые в смысле главного значения):

$$a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)(2 - x)} dx; \quad b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x \cdot \cos x}{(x^2 + 1)(x - 1)} dx;$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x(x^2 + 4)} dx; \quad d) \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^4 - 1} dx;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^4 - 16} dx; \quad f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x + 1)(x^2 - ix - 1)^2}.$$

4. Выясните расположение дуги окружности C_R и сформулируйте вариант леммы Жордана, условия которого обеспечивают выполнение следующего равенства:

$$a) \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{iaz} dz = 0 \quad \text{при } a < 0;$$

$$b) \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) e^{az} dz = 0 \quad \text{при } a < 0.$$

§26. Вычисление несобственных интегралов (продолжение)

26.1. Несколько замечаний общего характера

Основная идея вычисления определенных интегралов посредством выхода в комплексную плоскость состоит в использовании такой функции и такого замкнутого контура, к которым применяется основная теорема о вычетах. В результате возникает соотношение, откуда и находят требуемый интеграл.

При вычислении собственных интегралов в п. 24.3 это достигается за счёт замены переменной.

В случае несобственных интегралов, которые сами по себе являются реализацией предельных переходов, естественно ожидать, что равенство, выражающее основную теорему о вычетах, следует подвергнуть предельному переходу (или нескольким предельным переходам одновременно). В этом процессе происходит непрерывная деформация контура интегрирования, и при соответствующем выборе функции и контура в результате должны получиться искомым интеграл, а также известные выражения (чаще всего, но не обязательно, принимающие в пределе нулевое значение).

Таким образом, в общей ситуации решение задачи вычисления несобственного интеграла методами ТФКП начинается с выяснения двух вопросов: 1) какова интегрируемая функция $F(z)$? 2) каков контур интегрирования?

Простейшие примеры, иллюстрирующие вышесказанное, представлены в пп. 25.1 и 25.2. В первом случае $F(z)$ является аналитическим продолжением подынтегральной функции, во втором — $F(z)$ выбирается несколько иначе. Контур интегрирования одинаков в обоих случаях: одна его часть — отрезок действительной прямой — присутствует необходимым образом, так как отсюда в пределе и получаются искомые интегралы; другая — дуга, обеспечивающая замыкание

контура, — такова, что интегралы по ней в пределе исчезают.

Во всех изученных нами выше случаях вычисление интегралов можно было провести в общем виде, что и нашло отражение в формулировках утверждения п. 24.3 и теорем 25.1–25.3. Затем, при решении конкретной задачи соответствующего типа, использовалась полученная формула.

Если же требуется решить нетиповую задачу, следует полностью реализовать описанную нами схему, как это будет показано в приводимых ниже примерах.

26.2. Трудности в выборе функции

В п. 25.2 мы имели возможность убедиться, что комплексная функция $F(z)$ не обязана быть аналитическим продолжением подынтегральной. Встречаются и другие ситуации, когда выбор $F(z)$ не очевиден (см. пример ниже и п. 26.5).

Пример. Вычислить интеграл $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$.

▷ Для нахождения I выберем $f(z) = \frac{e^{2zi} - 1}{2z^2}$ и контур

$\gamma_{R,\rho}$, состоящий из отрезков $[-R; -\rho]$ и $[\rho; R]$ действительной оси и двух полуокружностей C_R и C_ρ (рис. 79). Функция $f(z)$ аналитична в замкнутой области, ограниченной кривой $\gamma_{R,\rho}$ (особая точка $z = 0$ не должна находиться на линии интегрирования, поэтому её обходим по дуге C_ρ). Согласно основной теореме получаем

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = \int_{\gamma_R} f(x) dx + \int_{-R}^{-\rho} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) dz = 0. \quad (1)$$

Поскольку других особых точек в конечной части комплексной плоскости функция $f(z)$ не имеет, равенство (1) справедливо $\forall R \geq R_0$ и $\forall \rho, 0 < \rho \leq \rho_0 < R_0$, а, значит, можно

совершить предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0$.

При этом

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\rho} f(x) dx + \int_{\rho}^R f(x) dx &\rightarrow v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx. \\ \int_{C_{\rho}} f(z) dz &= \{z = \rho e^{i\varphi}, \varphi \in [0; \pi]\} = \int_{\pi}^0 f(\rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi} d\varphi = \\ &= - \int_0^{\pi} i \frac{e^{2i\rho e^{i\varphi}} - 1}{2\rho e^{i\varphi}} d\varphi = - \int_0^{\pi} i \frac{1 + 2i\rho e^{i\varphi} + O(\rho^2) - 1}{2\rho e^{i\varphi}} d\varphi = \\ &= \int_0^{\pi} (1 + O(\rho)) d\varphi \rightarrow \pi. \end{aligned}$$

Интеграл по дуге C_R распадается на разность

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_{C_R} \frac{e^{2zi} - 1}{2z^2} dz = \int_{C_R} \frac{e^{2zi}}{2z^2} dz - \int_{C_R} \frac{dz}{2z^2},$$

где оба интеграла исчезают при $R \rightarrow +\infty$ — первый в силу леммы Жордана, второй — по лемме 1 п. 25.1.

Таким образом, равенство (1) в пределе даёт

$$\begin{aligned} v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2xi} - 1}{2x^2} dx + \pi &= 0 \quad \Leftrightarrow \\ v.p. \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos 2x - 1}{2x^2} dx + i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin 2x}{2x^2} dx \right) &= -\pi, \end{aligned}$$

откуда, проводя тригонометрические преобразования и выделяя действительную часть, имеем

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

(заметим, что I не имеет особенностей в точке $x = 0$ и сходится как интеграл первого рода) $\triangleleft$

26.3. Трудности в выборе контура

В примерах этого пункта существенную роль при выборе контура интегрирования играет неоднозначность функции.

Примеры. Вычислить интегралы

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad I_1 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n + 1}, \quad n \in \mathbb{N}, n \geq 2; \\ \text{b)} \quad I_2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x + 1} dx \quad (0 < p < 1). \end{aligned}$$

$\triangleright$ а) Возьмем $f(z) = \frac{1}{z^n + 1}$. Заметив, что на лучах

$\arg z = 0$ и $\arg z = \frac{2\pi}{n}$ поведение $f(z)$ одинаково, в качестве контура γ_R выберем границу кругового сектора радиуса R с углом $\frac{2\pi}{n}$ (рис. 80). Особыми точками $f(z)$ являются n простых полюсов $z_k = \sqrt[n]{-1} = e^{\frac{i\pi(1+2k)}{n}}$, $k = 0, \dots, n-1$, лишь один из которых, а именно $z_0 = e^{\frac{i\pi}{n}}$, находится внутри γ_R . Поэтому

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z_0} f(z). \quad (2)$$

$$\text{Вычислив} \quad \operatorname{res}_{z_0} f(z) = \frac{1}{n z_0^{n-1}} = \frac{1}{n} e^{-\frac{i\pi(n-1)}{n}} = -\frac{1}{n} e^{\frac{i\pi}{n}},$$

детально распишем равенство (2):

$$\int_0^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{\gamma_1} f(z) dz = -\frac{2\pi i}{n} e^{\frac{i\pi}{n}}. \quad (3)$$

Поскольку это равенство справедливо $\forall R > 1$, сделаем в нём предельный переход при $R \rightarrow +\infty$. Для этого найдём предел каждого из интегралов из левой части (3):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_0^R f(x) dx = \int_0^{+\infty} f(x) dx = I_1;$$

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \left\{ z = re^{\frac{2\pi i}{n}}, r \in [0; R] \right\} = \int_R^0 f\left(re^{\frac{2\pi i}{n}}\right) e^{\frac{2\pi i}{n}} dr =$$

$$= - \int_0^R \frac{e^{\frac{2\pi i}{n}}}{r^n + 1} dr \rightarrow -e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot I_1.$$

$$\int_{C_R} f(z) dz = \left\{ z = Re^{i\varphi}, 0 \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{n} \right\} =$$

$$= \int_0^{\frac{2\pi}{n}} f(Re^{i\varphi}) Rie^{i\varphi} d\varphi = \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{Rie^{i\varphi}}{R^n e^{in\varphi} + 1} d\varphi.$$

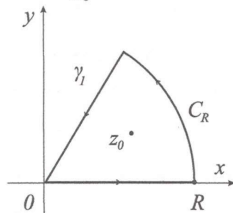


Рис. 80

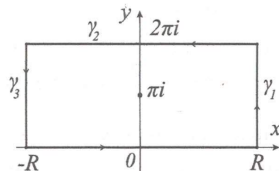


Рис. 81

Оценим последний интеграл, используя неравенство

$$|a + b| \geq ||a| - |b||: \quad \left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \left| \frac{Rie^{i\varphi}}{R^n e^{in\varphi} + 1} \right| d\varphi \leq$$

$$\leq \int_0^{\frac{2\pi}{n}} \frac{R}{R^n - 1} d\varphi = \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{R}{R^n - 1} \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$, так как $n \geq 2$.

Итак, из равенства (3) имеем: $I_1 - e^{\frac{2\pi i}{n}} \cdot I_1 = -\frac{2\pi i}{n} \cdot e^{\frac{\pi i}{n}}$, поэтому

$$I_1 = -\frac{2\pi i}{n} \cdot \frac{e^{\frac{\pi i}{n}}}{1 - e^{\frac{2\pi i}{n}}} = \frac{2\pi i}{n \left(e^{\frac{\pi i}{n}} - e^{-\frac{\pi i}{n}} \right)} = \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{\pi}{n}}.$$

b) Выберем $f(z) = \frac{e^{pz}}{e^z + 1}$ и, учитывая периодичность экспоненты e^z с периодом $2\pi i$, рассмотрим в качестве γ_R контур прямоугольника с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R + 2\pi i$ (рис. 81). Решения уравнения

$$e^z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = \text{Ln}(-1) = i\pi(1 + 2n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

являются особыми точками $f(z)$. Только одна из них, а именно $z_0 = \pi i \in \text{int } \gamma_R$. Очевидно, это простой полюс $f(z)$.

$$\text{Найдём вычет: } \text{res}_{z_0} f(z) = \left. \frac{e^{pz}}{(e^z + 1)'} \right|_{z_0} = \frac{e^{pz_0}}{e^{z_0}} = -e^{ip\pi}.$$

$$\text{Поэтому } \oint_{\gamma_R} f(z) dz = -2\pi i \cdot e^{ip\pi}, \quad \text{т.е.}$$

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = -2\pi i \cdot e^{ip\pi}. \quad (4)$$

Как обычно, перейдём в полученном равенстве к пределу при $R \rightarrow +\infty$. Для этого рассмотрим предел каждого из интегралов в (4).

Во-первых,

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{e^x + 1} dx = I_2,$$

причём условие $0 < p < 1$ обеспечивает сходимость этого интеграла.

На верхней границе прямоугольника γ_2 , где $z = x + 2\pi i$,

$$x \in [-R; R], \text{ получаем } \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{e^{p(x+2\pi i)}}{e^x + 1} dx =$$

$$= -e^{2\pi pi} \cdot \int_{-R}^R \frac{e^{px}}{e^x + 1} dx \rightarrow -e^{2\pi pi} \cdot I_2 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty.$$

Изучим поведение интегралов на боковых сторонах прямоугольника. Если $z \in \gamma_1$, то $z = R + iy$, $y \in [0; 2\pi]$, поэтому

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{e^{p(R+iy)}}{e^{R+iy} + 1} i dy,$$

следовательно,

$$\left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{pR}}{|e^{R+iy} + 1|} dy \leq \int_0^{2\pi} \frac{e^{pR}}{e^R - 1} dy \sim 2\pi e^{(p-1)R},$$

где последнее выражение стремится к нулю при $R \rightarrow +\infty$, так как $p < 1$.

Аналогично доказывается, что $\int_{\gamma_3} f(z) dz \rightarrow 0$ вследствие условия $p > 0$.

Итак, равенство (4) в пределе приобретает вид

$$I_2 - e^{2p\pi i} \cdot I_2 = -2\pi i \cdot e^{p\pi i},$$

значит,

$$I_2 = \frac{2\pi i \cdot e^{p\pi i}}{e^{2p\pi i} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi} <$$

26.4. Использование многозначных функций

В следующих задачах применяются многозначные функции $\text{Ln } z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k)$ и $z^\alpha = e^{\alpha \text{Ln } z}$. Ранее было показано, что в области $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$, т.е. в плоскости с разрезом по вещественной положительной полуоси, возможно выделение регулярных однозначных ветвей. Это, например, главное значение логарифма $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, $\arg z \in [0; 2\pi)$, а также $z^\alpha = e^{\alpha \ln z} = |z|^\alpha e^{i\alpha \arg z}$, $\alpha \in \mathbf{R}$. В частности, при $\arg z = 0$ имеем $z = x > 0$ и $z^\alpha = |z|^\alpha = x^\alpha > 0$.

Примеры. Вычислить интегралы

$$a) I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2 + 1} dx; \quad b) I_2 = \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx \quad (0 < p < 1).$$

▷ а) Пусть $f(z) = \frac{\ln z}{z^2 + 1}$ — однозначная регулярная ветвь многозначной функции с особыми точками $z_0 = 0$ (точка ветвления) и $z_{1,2} = \pm i$ (простые полюсы). Выберем контур $\gamma_{R,\rho}$ — границу верхнего полу круга радиуса R с обходом точки $z_0 = 0$ по дуге C_ρ (рис. 82). Так как $\gamma_{R,\rho}$ не принадлежит области аналитичности $f(z)$, следует применить теорему

$$24.2. \text{ Тогда } \oint_{\gamma_{R,\rho}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{res}_{z=i} f(z), \quad \text{или (5):}$$

$$\int_\rho^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_\gamma f(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) dz = 2\pi i \frac{\ln z}{2z} \Big|_{z=i}$$

Поскольку равенство (5) справедливо $\forall R \geq R_0$ и $\forall \rho: 0 < \rho \leq \rho_0 < R_0$, совершим предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0$. При этом $\int_\rho^R f(x) dx \rightarrow I_1$ (легко проверить, что интеграл сходится). Оценим интегралы по дугам:

$$\int_{C_R} f(z) dz = \int_0^\pi f(R e^{i\varphi}) R i e^{i\varphi} d\varphi = i \int_0^\pi \frac{\ln R + i\varphi}{R^2 e^{2i\varphi} + 1} R e^{i\varphi} d\varphi,$$

следовательно,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{|\ln R + i\varphi|}{R^2 - 1} R d\varphi \sim \int_0^\pi \frac{\ln R}{R} d\varphi \rightarrow 0$$

при $R \rightarrow +\infty$. Аналогично

$$\left| \int_{C_\rho} f(z) dz \right| = \left| \int_\pi^0 f(\rho e^{i\varphi}) \rho i e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$\leq \int_0^\pi \frac{\rho |\ln \rho + i\varphi|}{|\rho^2 e^{2i\varphi} + 1|} d\varphi \sim \int_0^\pi \rho |\ln \rho| d\varphi \rightarrow 0$$

при $\rho \rightarrow 0$. Наконец, для $z \in \gamma$, т.е. для $z = r e^{i\pi}$,

получаем
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_R^{\rho} \frac{\ln r + i\pi}{(-r)^2 + 1} d(-r) =$$

$$= \int_{\rho}^R \frac{\ln r}{r^2 + 1} dr + \int_{\rho}^R \frac{i\pi}{r^2 + 1} dr \rightarrow I_1 + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 + 1},$$

когда $R \rightarrow +\infty$, $\rho \rightarrow 0$.

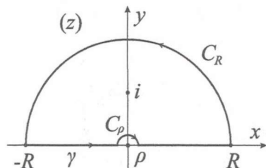


Рис. 82

Таким образом, поскольку $\ln i = \frac{\pi}{2}i$, из равенства (5) следует

$$2I_1 + i\pi \int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 + 1} = \frac{\pi^2}{2}i,$$

значит, $I_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\pi^2}{2}i \right) = 0$. Заметим, что попутно получено значение интеграла $\int_0^{+\infty} \frac{dr}{r^2 + 1} = \frac{\pi}{2}$.

б) Возьмем ту однозначную регулярную ветвь функции $f(z) = \frac{z^{p-1}}{z+1}$, для которой $z^{p-1} = x^{p-1} > 0$ при $z = x > 0$. Рассмотрим в качестве контура систему двух окружностей, соединенных разрезом $[\rho; R]$ вещественной оси (рис. 83). Так как $f(z) \in \mathcal{A}(\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+)$ за исключением простого полюса $z = -1$ и непрерывна вплоть до границы $\mathbb{R}^+$ (т.е. на верхнем и нижнем "берегах" разреза при $x > 0$), то по теореме 24.2

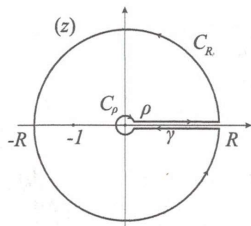


Рис. 83

$$\int_{\rho}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz +$$

$$+ \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{C_{\rho}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \operatorname{res}_{z=-1} f(z) \quad (6)$$

(здесь γ - нижний "берег" разреза, где $z = r e^{2\pi i}$).

Совершим теперь предельный переход при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0$. При этом $\int_{\rho}^R f(x) dx \rightarrow I_2$ (условие $0 < p < 1$ обеспечивает сходимость интеграла).

Далее,

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| = \left| \int_0^{2\pi} f(R e^{i\varphi}) i R e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{|R(p-1) e^{i(p-1)\varphi}|}{|R e^{i\varphi} + 1|} |i R e^{i\varphi}| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \frac{R^p}{R-1} d\varphi \sim$$

$$\sim \int_0^{2\pi} R^{p-1} d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } R \rightarrow +\infty, \text{ так как } p < 1.$$

Точно так же $\left| \int_{C_{\rho}} f(z) dz \right| = \left| \int_{2\pi}^0 f(\rho e^{i\varphi}) i \rho e^{i\varphi} d\varphi \right| \leq$

$$\leq \int_0^{2\pi} \frac{|\rho(p-1) e^{i(p-1)\varphi}|}{|\rho e^{i\varphi} + 1|} |i \rho e^{i\varphi}| d\varphi \leq \int_0^{2\pi} \frac{\rho^p}{|\rho-1|} d\varphi \sim$$

$$\sim \int_0^{2\pi} \rho^p d\varphi \rightarrow 0 \quad \text{при } \rho \rightarrow 0, \text{ поскольку } p > 0.$$

Наконец, для $z \in \gamma$ имеем $\int_{\gamma} f(z) dz =$

$$= \int_R^{\rho} f(r e^{2\pi i}) e^{2\pi i} dr = - \int_{\rho}^R \frac{r^{p-1} e^{2i\pi(p-1)}}{r e^{2i\pi} + 1} e^{2\pi i} dr =$$

$$-\int_{\rho}^R \frac{r^{p-1} e^{2i\pi p}}{r+1} dr = -e^{2i\pi p} \int_{\rho}^R \frac{r^{p-1}}{r+1} dr \rightarrow -e^{2i\pi p} I_2.$$

Найдём вычет:

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = z^{p-1} \Big|_{z=-1} = (-1)^{p-1} = e^{i(p-1)\pi} = e^{-i\pi} \cdot e^{ip\pi} = -e^{ip\pi}.$$

Поэтому из равенства (6) получаем $I_2 - e^{2i\pi p} I_2 = -2\pi i e^{ip\pi}$

$$\Leftrightarrow I_2 = 2\pi i \frac{e^{ip\pi}}{e^{2i\pi p} - 1} = \frac{2\pi i}{e^{p\pi i} - e^{-p\pi i}} = \frac{\pi}{\sin p\pi} \triangleleft$$

Замечание. Известно, что $\int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{(x+1)^{p+q}} dx = B(p, q)$, где $B(p, q)$ – бета-функция Эйлера. В частности, имеет место

$$\text{равенство } \int_0^{+\infty} \frac{x^{p-1}}{x+1} dx = B(p, 1-p). \quad \text{Таким образом,}$$

$$B(p, 1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (0 < p < 1).$$

26.5. Различные трудности

В этом разделе мы рассмотрим примеры ситуаций, когда и выбор функции, и выбор контура могут представлять определенные затруднения.

Примеры. Вычислить интегралы

$$a) \quad I_1 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\lambda x dx;$$

$$b) \quad I_2 = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \cos ax dx, \quad 0 < p < 1, \quad a > 0.$$

$$\triangleright a) \quad \text{Если } \lambda = 0, \text{ то имеем } \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

(интеграл Эйлера-Пуассона).

Далее, учитывая чётность косинуса, ограничимся случаем $\lambda > 0$. Рассмотрим $f(z) = e^{-z^2}$, а в качестве контура γ_R – прямоугольник с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R + \lambda i$ (см. рис. 84). Поскольку $f(z)$ не имеет особых точек в $\mathbb{C}$, согласно

основной теореме получаем $\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow$

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{\gamma_1} f(z) dz + \int_{\gamma_2} f(z) dz + \int_{\gamma_3} f(z) dz = 0. \quad (7)$$

Перейдём к пределу при $R \rightarrow +\infty$ в равенстве (7):

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

$$\text{Далее, } \int_{\gamma_2} f(z) dz = \int_R^{-R} f(x + i\lambda) dx = - \int_{-R}^R e^{-(x+i\lambda)^2} dx =$$

$$-e^{\lambda^2} \int_{-R}^R e^{-x^2} (\cos 2\lambda x - i \sin 2\lambda x) dx = -2e^{\lambda^2} \int_0^R e^{-x^2} \cos 2\lambda x dx$$

$$\rightarrow -2e^{\lambda^2} \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\lambda x dx = -2e^{\lambda^2} I_1 \text{ при } R \rightarrow +\infty.$$

Интеграл по отрезку γ_1 , где $z = R + iy$, $y \in [0; \lambda]$, равен

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_0^{\lambda} e^{-(R+iy)^2} dy = e^{-R^2} \int_0^{\lambda} e^{y^2 - 2iRy} dy.$$

$$\text{Поэтому } \left| \int_{\gamma_1} f(z) dz \right| \leq e^{-R^2} \int_0^{\lambda} e^{y^2} |e^{-2iRy}| dy \leq$$

$$\leq e^{-R^2} \int_0^{\lambda} e^{y^2} dy = e^{-R^2} e^{\lambda^2} \lambda \rightarrow 0, \quad \text{когда } R \rightarrow +\infty.$$

Аналогичная оценка справедлива для $\int_{\gamma_3} f(z) dz$. Таким образом, равенство (7) в пределе даёт

$$\sqrt{\pi} - 2e^{\lambda^2} I_1 = 0 \Leftrightarrow I_1 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-\lambda^2}.$$

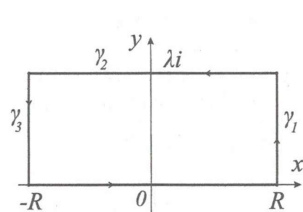


Рис. 84

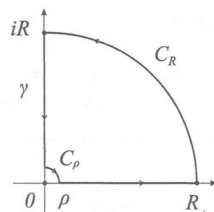


Рис. 85

б) Рассмотрим однозначную регулярную ветвь многозначной функции $z^{p-1} = e^{(p-1)\ln z} = e^{(p-1)(\ln|z| + i\arg z)}$, где $\arg z \in [0, 2\pi)$, и контур $\gamma_{R,\rho}$, изображённый на рис. 85. Функция $f(z) = z^{p-1}e^{-az}$ аналитична и непрерывна вплоть до границы в $\text{int } \gamma_{R,\rho}$. Поэтому согласно теореме 24.2

$$\oint_{\gamma_{R,\rho}} f(z) dz = 0 \Leftrightarrow \int_{\rho}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz + \int_{\gamma} f(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) dz = 0. \quad (8)$$

В пределе при $R \rightarrow +\infty$ и $\rho \rightarrow 0$ получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\rho}^R f(x) dx &= \int_{\rho}^R x^{p-1} e^{-ax} dx \rightarrow \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-ax} dx = \{t = ax\} \\ &= \frac{1}{a^p} \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt = \frac{1}{a^p} \Gamma(p), \end{aligned}$$

где $\Gamma(p)$ – гамма-функция Эйлера.

Как и раньше, без труда доказывается, что

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = 0.$$

Искомый интеграл возникает при рассмотрении $z \in \gamma$, где $z = iy$, $y \in [\rho, R]$. Поскольку $f(iy) = (iy)^{p-1} e^{-ia y} = e^{(p-1)(\ln(iy) + i\arg(iy))} \cdot e^{-ia y} = e^{(p-1)(\ln y + i\pi/2)} \cdot e^{-ia y} = y^{p-1} \cdot e^{i(p-1)\frac{\pi}{2}} \cdot e^{-ia y} = y^{p-1} \cdot e^{i(p-1)\frac{\pi}{2}} \cdot (\cos ay - i \sin ay)$,

получаем
$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_R^{\rho} f(iy) i dy =$$

$$= -i e^{i(p-1)\frac{\pi}{2}} \int_{\rho}^R y^{p-1} (\cos ay - i \sin ay) dy \xrightarrow{\rho \rightarrow 0, R \rightarrow +\infty}$$

$$\rightarrow -e^{ip\frac{\pi}{2}} \int_0^{+\infty} y^{p-1} (\cos ay - i \sin ay) dy.$$

Итак, предельный переход в (8) приводит к равенству

$$\int_0^{+\infty} y^{p-1} (\cos ay - i \sin ay) dy = \frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{a^p} \Gamma(p). \quad (9)$$

Так как $e^{-ip\frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\pi p}{2} - i \sin \frac{\pi p}{2}$, то из (9) следует

$$I_2 = \text{Re} \left(\frac{e^{-ip\frac{\pi}{2}}}{a^p} \Gamma(p) \right) = \frac{\Gamma(p)}{a^p} \cos \frac{\pi p}{2} <$$

26.6. Вопросы и задачи

Вычислите следующие интегралы при помощи вычетов:

1. а) $\int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x^2} dx$ ($a, b \in \mathbf{R}$); б) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^3 x}{x^3} dx$

Указание. $f(z) = \frac{e^{3iz} - 3e^{iz} + 2}{z^3}$.

$$2. a) \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{x^{2n}+1} dx, (n \in \mathbb{N}, n \geq 2); b) \int_0^{+\infty} \frac{x}{x^6+1} dx;$$

$$c) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ax} - e^{bx}}{e^x + 1} dx \quad (0 < a, b < 1);$$

$$d) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{(e^x + 1)(e^x + 2)} dx \quad (0 < p < 2); e) \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{ch} x} dx;$$

$$f) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{px}}{\operatorname{ch} x} dx \quad (|p| < 1); g) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\operatorname{sh} x} dx$$

Указание. Рассмотрите прямоугольник с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R + \pi i$.

$$3. a) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{x^2 + 9} dx \quad (|p| < 1); b) \int_0^{+\infty} \frac{x^p}{(x+2)^2} dx \quad (|p| < 1);$$

$$c) \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^p(x+2)} \quad (0 < p < 1); d) \int_0^{+\infty} \frac{\ln^2 x}{x^2 + 1} dx;$$

$$e) \int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)} dx; f) \int_0^{+\infty} \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Указание. $f(z) = \frac{z \ln^2 z}{(z^2 + 1)^2}$, контур см. рис. 82.

$$4. a) I = \int_0^{+\infty} x^{p-1} \sin ax dx, \quad 0 < p < 1, a > 0;$$

$$b) \int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx; \int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx \text{ (интегралы Френеля).}$$

Указание. $f(z) = e^{iz^2}$; контур — граница сектора $0 \leq |z| \leq R$, $0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{4}$.

§27. Суммирование рядов с помощью вычетов

27.1. Базовые утверждения

Основная теорема о вычетах может быть использована для вычисления сумм некоторых числовых рядов. В отличие от задач, рассмотренных в §§ 25–26, здесь подынтегральная функция имеет в $\mathbb{C}$ счетное множество особых точек (полюсов). Рассматривается последовательность расширяющихся областей, по границе которых проводится интегрирование, а предельный переход в соответствующей последовательности интегралов и приводит к результату, содержащему сумму ряда.

Ниже приводятся две теоремы реализующие эту идею.

Теорема 27.1. Пусть $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, среди которых нет целых действительных чисел, и пусть $f(z) = o(1)$ при $|z| \rightarrow +\infty$. Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z_j} \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}. \quad (1)$$

▷ Проинтегрируем $F(z) = \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}$ по границе Γ_n прямоугольника с вершинами в точках $z = \pm \left(n + \frac{1}{2}\right) \pm in$ (здесь число $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, чтобы точки $z_1, z_2, \dots, z_m$ находились внутри прямоугольника. Поскольку функция $F(z)$ кроме этих особых точек имеет в $\mathbb{C}$ еще и простые полюсы во всех точках $k \in \mathbb{Z}$, то по теореме 24.1

$$\oint_{\Gamma_n} F(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z_j} F(z) + \sum_{|k| \leq n} \operatorname{res}_{z=k} F(z) \right).$$

Заметим, что $\operatorname{res}_{z=k} F(z) = \frac{f(k)}{\cos \pi k} = (-1)^k f(k)$. Остается показать, что $I(n) = \oint_{\Gamma_n} F(z) dz \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Действительно, обозначим стороны прямоугольника $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$. На стороне γ_1 , параллельной мнимой оси, имеем $z = n + \frac{1}{2} + iy$, где $y \in [-n; n]$. Тогда

$$\sin \pi \left(n + \frac{1}{2} + iy \right) = \sin \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \cos i\pi y + \\ + \cos \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin i\pi y = i(-1)^n \operatorname{ch} \pi y,$$

следовательно,

$$|I_1| = \left| \int_{\gamma_1} F(z) dz \right| \leq \pi \max_{z \in \gamma_1} |f(z)| \int_{-n}^n \frac{dy}{\operatorname{ch} \pi y} \leq$$

$$\leq \pi \max_{z \in \gamma_1} |f(z)| \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch} \pi y} = \pi \max_{z \in \gamma_1} |f(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

в силу условия теоремы $f(z) = o(1)$ при $|z| \rightarrow +\infty$. Отметим, что в выкладках использовано равенство $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{\operatorname{ch} \pi y} = 1$, которое легко проверить.

Если $z \in \gamma_2$ — верхней стороне прямоугольника, то $z = x + in$, где $|x| \leq n + \frac{1}{2}$. Поэтому $\left| \sin \pi(x + in) \right| =$

$$= \frac{1}{2} \left| e^{i\pi(x+in)} - e^{-i\pi(x+in)} \right| \geq \frac{1}{2} (e^{\pi n} - e^{-\pi n}) \geq \frac{1}{4} e^{\pi n},$$

тогда

$$|I_2| = \left| \int_{\gamma_2} F(z) dz \right| \leq 4\pi \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| \left| \int_{n+\frac{1}{2}}^{-n-\frac{1}{2}} \frac{dx}{e^{\pi n}} \right| =$$

$$= 4\pi \max_{z \in \gamma_2} |f(z)| (2n+1) e^{-\pi n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Аналогично оцениваются I_3 и I_4 . Отсюда и следует (1) $\triangleleft$

Теорема 27.2. Пусть $f(z)$ аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением точек $z_1, z_2, \dots, z_m$, среди которых нет целых действительных чисел, и пусть $f(z) = o\left(\frac{1}{|z|}\right)$ при $|z| \rightarrow +\infty$.

Тогда

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(k) = - \sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z_j} (\pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z). \quad (2)$$

$\triangleright$ Доказательство проводится так же, как в предыдущем случае. В качестве контура интегрирования Γ_n рассмотрим границу квадрата с вершинами $z = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) \pm i \left(n + \frac{1}{2} \right)$, где $n \in \mathbb{N}$ достаточно велико, чтобы все особые точки $f(z)$ попали внутрь Γ_n . Функция $F(z) = \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ имеет еще простые полюсы во всех точках $z_k = k \in \mathbb{Z}$, часть из которых (при $|k| \leq n$) принадлежит внутренности Γ_n . Найдем

$$\operatorname{res}_{z=k} F(z) = \operatorname{res}_{z=k} \frac{\pi f(z) \cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{\pi f(z) \cos \pi z}{(\sin \pi z)'} \Big|_{z=k} = f(k).$$

Согласно основной теореме о вычетах,

$$\oint_{\Gamma_n} F(z) dz = 2\pi i \left(\sum_{j=1}^m \operatorname{res}_{z_j} F(z) + \sum_{|k| \leq n} f(k) \right).$$

Остается установить, что $\oint_{\Gamma_n} F(z) dz \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$.

На сторонах квадрата γ_1, γ_3 , параллельных мнимой оси, $z = \pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy$, тогда

$$\left| \sin \pi \left(\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy \right) \right| = \left| \pm \sin \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \cos i\pi y + \right. \\ \left. + \cos \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \sin i\pi y \right| = \operatorname{ch} \pi y.$$

Аналогично $\left| \cos \pi \left(\pm \left(n + \frac{1}{2} \right) + iy \right) \right| = |\operatorname{sh} \pi y|$,

так что $|\operatorname{ctg} \pi z| = |\operatorname{th} \pi y| = \left| \frac{e^{\pi y} - e^{-\pi y}}{e^{\pi y} + e^{-\pi y}} \right| < 1$.

На сторонах квадрата γ_2, γ_4 , параллельных вещественной оси, $z = x \pm i \left(n + \frac{1}{2} \right)$. Используя известные неравенства

$$|\cos z| \leq \operatorname{ch} y, \quad |\sin z| \geq |\operatorname{sh} y|,$$

оценим

$$|\operatorname{ctg} \pi z| \leq |\operatorname{cth} \pi y| = \left| \operatorname{cth} \pi \left(n + \frac{1}{2} \right) \right| = \frac{1 + e^{-\pi(2n+1)}}{1 - e^{-\pi(2n+1)}} < \frac{1 + e^{-\pi}}{1 - e^{-\pi}}.$$

Итак, при любом $n \in \mathbb{N}$ $|\operatorname{ctg} \pi z| \Big|_{z \in \Gamma_n} \leq c_0$ для некоторой константы c_0 , следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \oint_{\Gamma_n} \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z dz \right| &\leq \pi \max_{z \in \Gamma_n} |f(z)| \oint_{\Gamma_n} |\operatorname{ctg} \pi z| ds \leq \\ &\leq 4\pi c_0 (2n+1) \max_{\Gamma_n} |f(z)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

поскольку $|z||f(z)| = o(1)$ при $|z| \rightarrow +\infty$ $\triangleleft$

27.2. Примеры

Вычислить суммы следующих рядов ($a > 0$):

$$a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}; \quad b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}; \quad c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}.$$

$\triangleright$ а) Функция $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$, аналитична в $\mathbb{C}$ за исключением двух простых полюсов в точках $z = \pm ai$, кроме того $|f(z)| \sim \frac{1}{|z|^2}$ при $|z| \rightarrow +\infty$. По формуле (3) п. 23.2 найдем

$$\operatorname{res}_{ai} \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z} = \operatorname{res}_{ai} \frac{\frac{\pi}{z^2 + a^2}}{\sin \pi z} = \frac{\pi}{2ai \sin \pi ai} = -\frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a}.$$

То же значение имеет $\operatorname{res}_{-ai} \frac{\pi f(z)}{\sin \pi z}$, следовательно, согласно (1) получим

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a \operatorname{sh} \pi a}.$$

Остается заметить, что для членов данного ряда верно равенство $a_{-k} = a_k$, значит,

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} + a_0,$$

$$\text{откуда} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a \operatorname{sh} \pi a} - \frac{1}{2a^2} \quad \triangleleft$$

$\triangleright$ б) Для $f(z) = \frac{1}{z^2 + a^2}$ с простыми полюсами $z = \pm ai$ и $F(z) = \pi f(z) \operatorname{ctg} \pi z$ вычислим

$$\operatorname{res}_{ai} F(z) = \operatorname{res}_{ai} \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi z}{z^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{ctg} \pi ai}{2ai} = -\frac{\pi \operatorname{cth} \pi a}{2a} = \operatorname{res}_{-ai} F(z).$$

$$\text{Поэтому согласно (2)} \quad \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi \operatorname{cth} \pi a}{a}. \quad \text{Заме-}$$

$$\text{тим, что} \quad \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{1}{k^2 + a^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2 + a^2}, \quad \text{следовательно,}$$

$$2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{\pi \operatorname{cth} \pi a}{a}, \quad \text{так что}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{1}{2a^2} (\pi a \operatorname{cth} \pi a - 1) \quad \triangleleft$$

▷ с) Используем результат примера а), рассматривая сумму ряда как функцию параметра a : $S(a) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2}$. Поскольку ряд сходится равномерно относительно $a \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} &= \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{a \rightarrow 0+0} \frac{(-1)^k}{k^2 + a^2} = \lim_{a \rightarrow 0+0} S(a) = \\ &= \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a^2} \left(\frac{\pi a}{\operatorname{sh} \pi a} - 1 \right) = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\pi a - \operatorname{sh} \pi a}{2a^2 \operatorname{sh} \pi a} = -\frac{\pi^2}{12} \quad \triangleleft \end{aligned}$$

27.3. Вопросы и задачи

Найдите суммы следующих рядов:

1. а) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$; б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$; в) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^3}$;
- д) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k+a)^2}$ ($a \notin \mathbb{Z}$); е) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(k^2+a^2)^2}$ ($a > 0$).
2. а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2 - a^2}$ ($a > 0, a \notin \mathbb{Z}$); б) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$;
- в) $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(k+a)^2}$ ($a \notin \mathbb{Z}$); д) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$.
3. а) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$; б) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4}$.

Глава 7

Элементы геометрической теории

§28. Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Теорема Руше

28.1. Свойство логарифмического вычета

Определение. Пусть $f(z)$ — однозначная аналитическая в некоторой области функция. Выражение $\frac{f'(z)}{f(z)}$ называется логарифмической производной функции $f(z)$.¹¹

Число $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ называется логарифмическим вычетом функции $f(z)$ относительно замкнутого контура γ .

Теорема 28.1. Пусть D — ограниченная область, функция $f(z)$ аналитична в замыкании $\bar{D}$ за исключением, возможно, конечного числа особых точек, которые все являются полюсами. Пусть на границе ∂D области функция $f(z) \neq 0$ и не имеет особых точек. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f, \quad (1)$$

где N_f и P_f — полное (т.е. считая с кратностью) количество нулей и полюсов $f(z)$ в D соответственно.

¹¹ Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой области, причем $f(z) \neq 0$, то существует $\operatorname{Ln} f(z)$. Дифференцирование любой регулярной ветви логарифма даёт $(\operatorname{Ln} f(z))' = \frac{f'(z)}{f(z)}$. Отсюда и происходит название.

▷ Пусть z_0 – нуль порядка k функции $f(z)$. Тогда существует окрестность точки z_0 , где $f(z) = (z - z_0)^k \varphi(z)$, причем $\varphi(z_0) \neq 0$ и $\varphi(z) \in \mathcal{A}(z_0)$. Так как $f'(z) = k(z - z_0)^{k-1} \varphi(z) + (z - z_0)^k \varphi'(z)$, то

$$h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k \varphi(z) + \varphi'(z)(z - z_0)}{\varphi(z)(z - z_0)} = \frac{k}{z - z_0} + \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}. \quad (2)$$

Поскольку второе слагаемое в правой части (2) – аналитическая в окрестности z_0 функция, точка z_0 является простым полюсом для $h(z)$, причём $\operatorname{res}_{z=z_0} h(z) = k$.

Далее, пусть z^0 – полюс порядка l функции $f(z)$, тогда для функции $g(z) = \frac{1}{f(z)}$ (доопределённой в z^0 по непрерывности) эта точка – нуль порядка l . Так как $\frac{g'(z)}{g(z)} = -\frac{f'(z)}{f(z)}$, то в соответствии с проведёнными выше выкладками имеем

$$\operatorname{res}_{z=z^0} h(z) = -\operatorname{res}_{z=z^0} \frac{g'(z)}{g(z)} = -l.$$

Заметим, что особые точки функции $h(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ исчерпываются нулями и полюсами $f(z)$. Согласно следствию 1 из теоремы 19.1 у функции $f(z)$ может быть в $\bar{D}$ лишь конечное число нулей (иначе $f(z) \equiv 0$, что противоречит условию). Итак, $h(z)$ имеет конечное число особых точек, причём все они находятся внутри D . Обозначим через $z_{01}, \dots, z_{0n}$ нули $f(z)$ в D , а через $k_1, \dots, k_n$ соответственно – их кратности. Пусть также $z_1^0, \dots, z_m^0$ – полюсы $f(z)$ порядков $l_1, \dots, l_m$ соответственно. Тогда по теореме 24.1 $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial D} h(z) dz =$

$$= \sum_{q=1}^n \operatorname{res}_{z_{0q}} h(z) + \sum_{p=1}^m \operatorname{res}_{z_p^0} h(z) = \sum_{q=1}^n k_q - \sum_{p=1}^m l_p = N_f - P_f \triangleleft$$

Итак, для функции, удовлетворяющей требованиям теоремы 28.1, *логарифмический вычет относительно контура, ограничивающего некоторую область, равен разности между полным количеством её нулей и полным числом полюсов внутри этой области.*

Замечание. В случае неодносвязной области D под ∂D подразумевается полная положительно ориентированная граница этой области.

Примеры.

Найти вычет функции, являющейся логарифмической производной $f(z) = \frac{z - \sin z}{(z + i)^2}$, относительно точки z_0 , если

$$a) \quad z_0 = 0; \quad b) \quad z_0 = -i; \quad c) \quad z_0 = \frac{1}{2}.$$

▷ а) $f(z)$ имеет в точке $z_0 = 0$ нуль 3-го порядка (докажите!) Существует проколотая окрестность $K(z_0)$, не содержащая полюсов и нулей функции $f(z)$. Пусть замкнутый контур γ таков, что $z_0 \in \operatorname{int} \gamma$, $\gamma \subset K$. Тогда по теореме 28.1

$$\operatorname{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N_f - P_f,$$

где N_f и P_f – соответственно полное количество нулей и полюсов $f(z)$ в области $\operatorname{int} \gamma$. Поэтому $\operatorname{res}_{z=0} \frac{f'(z)}{f(z)} = 3$.

б) Точка $z_0 = -i$ – полюс второго порядка $f(z)$. Рассуждая аналогично предыдущему, получаем $\operatorname{res}_{z=-i} \frac{f'(z)}{f(z)} = -2$.

с) Наконец, точка $z_0 = \frac{1}{2}$ – правильная точка $f(z)$, не являющаяся нулем, поэтому $\operatorname{res}_{z=\frac{1}{2}} \frac{f'(z)}{f(z)} = 0 \triangleleft$

Заметим, что обычно интерес представляет проблема противоположного свойства: как из каких-то иных соображений найти значение логарифмического вычета, чтобы, например, определить количество нулей аналитической функции в данной области. Подход к решению этой проблемы даёт так называемый *принцип аргумента*.

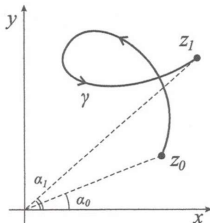


Рис. 86

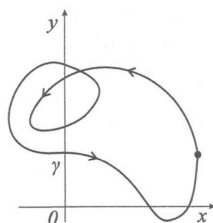


Рис. 87

28.2. Принцип аргумента

Пусть γ — гладкая кривая, которая соединяет точки z_0 и z_1 и не проходит через начало координат. Тогда для каждой точки $z \in \gamma$ справедливо представление $z = re^{ia}$, где $a \in \text{Arg } z$. Если начальному положению точки кривой соответствует некоторое значение аргумента α_0 и при движении точки по γ угол, непрерывно меняясь, достигает значения α_1 , то приращение $\alpha_1 - \alpha_0$ называется *вариацией аргумента* z при проходе кривой γ и обозначается $\text{Var}_\gamma \text{Arg } z$.

На рис. 86–88 представлены различные примеры кривых и соответствующих приращений аргументов. В частности, $\text{Var}_\gamma \text{Arg } z = \alpha_1 - \alpha_0$ (рис. 86); в случае замкнутой кривой $\text{Var}_\gamma \text{Arg } z = 0$, если начало координат находится вне γ (рис. 87) и $\text{Var}_\gamma \text{Arg } z = 2\pi n$, если кривая совершает n оборотов вокруг начала координат (рис. 88).

Определение. Пусть $f(z)$ — однозначная непрерывная на γ функция, не принимающая нулевых значений. Число $\text{Var}_\gamma \text{Arg } f(z)$ называется *вариацией аргумента функции* $f(z)$ при проходе точки z по кривой γ .

Результат теоремы 28.1 теперь можно представить в другой форме.

Теорема 28.2 (принцип аргумента). Пусть $f(z)$ — функция, аналитическая в области D за исключением конечного числа особых точек, γ — замкнутый контур, $\text{int } \gamma \subset D$. Если $f(z)$ не обращается в нуль и не имеет особых точек на γ , а все особые точки, находящиеся внутри γ , являются полюсами, то

$$\text{Var}_\gamma \text{Arg } f(z) = 2\pi (N_f - P_f), \quad (3)$$

где N_f и P_f — соответственно полное количество нулей и полюсов $f(z)$ внутри γ .

► Заметим сначала, что согласно п. 16.3 (см. пример 2 и замечание) интегрирование по гладкой кривой C , не проходящей через начало координат, от точки A до точки B даёт

$$\int_C \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln B - \ln A + 2\pi n i = \ln |B| - \ln |A| + i \text{Var}_C \text{Arg } \zeta \quad (4)$$

(здесь n — число полных оборотов вокруг начала координат).

Пусть z пробегает контур γ с началом (и концом) в точке z_0 , тогда точка $w = f(z)$ движется по некоторой гладкой замкнутой кривой Γ , причем $w_0 = f(z_0) \in \Gamma$, а $w = 0 \notin \Gamma$, так как $f(z)|_\gamma \neq 0$. В силу теоремы 28.1 и (4) имеем

$$N_f - P_f = \frac{1}{2\pi i} \oint_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{dw}{w} = \frac{1}{2\pi} \text{Var}_\Gamma \text{Arg } w,$$

так как кривая интегрирования замкнута.

Поскольку $\text{Var}_\Gamma \text{Arg } w = \text{Var}_\gamma \text{Arg } f(z)$, получаем (3) <

28.3. Теорема Руше

Теорема 28.3. Пусть D – ограниченная область, контур ∂D – ее граница; функции $f(z), g(z) \in \mathcal{A}(\overline{D})$. Если

$$|f(z)| > |g(z)| \quad \forall z \in \partial D,$$

то $N_{f+g} = N_f$ (здесь N_{f+g} и N_f – полное число нулей соответствующей функции внутри D).

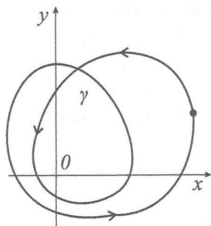


Рис. 88

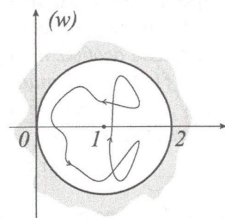


Рис. 89

▷ Так как $|f(z)| > |g(z)| \geq 0$ при $z \in \partial D$, то

$$|f(z)| > 0, \quad |f(z) + g(z)| \geq |f(z)| - |g(z)| > 0,$$

значит, функции $F(z) = f(z) + g(z)$ и $f(z)$ не имеют нулей на ∂D . В соответствии с принципом аргумента

$$N_{f+g} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} F(z), \quad N_f = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} f(z).$$

Тогда

$$\begin{aligned} N_{f+g} - N_f &= \frac{1}{2\pi} \left(\operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} F(z) - \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} f(z) \right) = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} \frac{f+g}{f} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g}{f} \right). \end{aligned}$$

Из равенства $w = 1 + \frac{g}{f}$ следует $|w - 1| = \left| \frac{g}{f} \right|$. Так как в точках границы $|f(z)| > |g(z)|$, то $|w - 1| < 1$. Поэтому при обходе точкой z границы ∂D точка w движется

по некоторой непрерывной замкнутой кривой Γ , находящейся внутри круга, расположенного в правой полуплоскости (см. рис. 89), значит, она не может совершить оборота вокруг начала координат в плоскости (w). Таким образом,

$$\operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} \left(1 + \frac{g(z)}{f(z)} \right) = \operatorname{Var}_{\Gamma} \operatorname{Arg} w = 0,$$

следовательно, $N_{f+g} = N_f$ ◁

Примеры.

1. Найти количество нулей многочлена $F(z)$ в области D , если

a) $F(z) = 2z^6 - 5iz^3 + z - 1, \quad D = \{ |z| < 1 \};$

b) $F(z) = 3z^7 + iz^5 - 8z^4 + 2z^2 + i, \quad D = \{ 1 < |z| < 2 \}.$

▷ a) Заметив, что $F(z)$ – целая функция, представим её в виде $F(z) = f(z) + g(z)$, где $f(z) = -5iz^3, g(z) = 2z^6 + z - 1$. Поскольку

$$|g(z)| = |2z^6 + z - 1| \leq 2|z|^6 + |z| + 1,$$

то $|g(z)| \Big|_{z \in \partial D} = |g(z)| \Big|_{|z|=1} \leq 4$. В то же время $|f(z)| \Big|_{z \in \partial D} = 5$, поэтому в силу теоремы Руше многочлен $F(z)$ имеет внутри единичного круга столько же нулей, сколько $f(z)$, т.е. три.

b) Введем обозначения $\gamma_1 : |z| = 1; \gamma_2 : |z| = 2$. Так как при $z \in \gamma_1$ справедливы соотношения

$$|-8z^4| = 8, \quad |3z^7 + iz^5 + 2z^2 + i| \leq 3 + 1 + 2 + 1 = 7,$$

то по теореме Руше у функции $F(z)$ внутри круга, ограниченного γ_1 , находятся четыре нуля.

Аналогично, оценивая при $z \in \gamma_2$ выражения

$$|3z^7| = 3|z|^7 = 384, \quad |iz^5 - 8z^4 + 2z^2 + i| \leq 2^5 + 8 \cdot 2^4 + 2 \cdot 2^2 + 1 = 169,$$

закключаем, что внутри окружности γ_2 многочлен $F(z)$ имеет семь нулей. Поскольку на окружности $\{|z| = 1\}$ у данного многочлена нулей нет (откуда это следует?), то в кольце $D = \{1 < |z| < 2\}$ имеется ровно три корня $F(z)$ $\triangleleft$

2. Найти количество корней уравнения $3z^2 - \operatorname{ch} iz = 0$ в области $D = \{|z| < 1\}$.

▷ Если $g(z) = -\operatorname{ch} iz$ и $f(z) = 3z^2$, то для $|z| = 1$ имеем $|f(z)| = 3|z|^2 = 3$.

Кроме того, при тех же значениях z справедливо неравенство $|e^{\pm iz}| \leq e^{|z|} = e$ (проверьте!). Следовательно,

$$|g(z)| = |-\operatorname{ch} iz| \leq \frac{1}{2} (|e^{iz}| + |e^{-iz}|) \leq e < 3 = |f(z)|,$$

если $|z| = 1$. Значит, у данного уравнения в круге D столько же корней, сколько у уравнения $f(z) = 0$, т.е. два $\triangleleft$

3. Основная теорема высшей алгебры.

Доказать, что многочлен $P_n(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, $a_k \in \mathbb{C}$, $a_0 \neq 0$, имеет в комплексной плоскости ровно n корней (считая с кратностями).

▷ Пусть $f(z) = a_0 z^n$, $g(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, тогда из равенства

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{g(z)}{f(z)} = \frac{1}{a_0} \lim_{z \rightarrow \infty} \left(\frac{a_1}{z} + \dots + \frac{a_n}{z^n} \right) = 0$$

следует, что найдется окружность $\gamma_{R_0} = \{z : |z| = R_0\}$ достаточно большого радиуса, во всех точках которой

$$\left| \frac{g(z)}{f(z)} \right| < 1 \Leftrightarrow |f(z)| > |g(z)|.$$

Тогда по теореме Руше (все ее условия выполнены) многочлен $P(z)$ имеет столько же нулей внутри γ_{R_0} , сколько и $f(z) = a_0 z^n$, т.е. ровно n . Осталось заметить, что это верно при любом значении $R > R_0$ $\triangleleft$

28.4. Вопросы и задачи

1. Непосредственным вычислением найдите вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки $z_0 \neq \infty$, являющейся полюсом порядка l .
2. Пусть $g \in \mathcal{A}(z_0)$, точка $z_0 \neq \infty$ — нуль порядка n функции $f(z)$. Найдите вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)} g(z)$ относительно z_0 , если
 - a) $g(z_0) \neq 0$;
 - b) $g(z_0) = 0$.
3. Пусть $g \in \mathcal{A}(z_0)$, точка $z_0 \neq \infty$ — полюс порядка l функции $f(z)$. Найдите вычет функции $\frac{f'(z)}{f(z)} g(z)$ относительно z_0 , если
 - a) $g(z_0) \neq 0$;
 - b) $g(z_0) = 0$.
4. Найдите вычет логарифмической производной функции $f(z)$ относительно точки z_0 , если
 - a) $f(z) = \frac{\sin(z^2)}{z(z^2 + 1)^3}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pi$; $z_0 = -i$.
 - b) $f(z) = \frac{e^z - \cos z}{(1 - \cos z)^2}$; $z_0 = 0$; $z_0 = \pi$; $z_0 = 2\pi$.
5. Найдите логарифмический вычет функции $f(z)$ относительно контура γ , если
 - a) $f(z) = \frac{e^{z^2}}{(z^3 + i)^2}$; $\gamma = \{|z| = 2\}$;
 - b) $f(z) = \frac{\operatorname{sh} z}{e^z - 1}$; $\gamma = \{|z| = 9\}$.
6. Докажите, что внутри круга $\left\{ |z| < \frac{1}{2} \right\}$ многочлен $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + 1$ ($a_k \in \mathbb{C}$, $|a_k| = 1$) не имеет корней.

7. Докажите, что в круге $\{|z| < 1\}$ при $\lambda > 1$ существует только один корень уравнения $ze^{\lambda-z} = 1$, причем этот корень вещественный.
8. Найдите количество нулей многочлена $P(z)$ в области D , если
- $P(z) = z^{10} - 6iz^7 + 2z^6 - z + i, \quad D = \{|z| < 1\};$
 - $P(z) = z^8 + iz^6 + z^4 - 12z^3 + 3z + 5, \quad D = \{1 < |z| < 2\};$
 - $P(z) = z^{12} + 6z^9 + iz^2 + 10, \quad D = \{1 < |z| < 2\};$
 - $P(z) = z^4 + 5iz^3 + (2+i)z + 1, \quad D = \{|z| > 1\}.$

§29. Свойства конформных отображений

29.1. Критерий однолиственности отображения

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ определена однозначная функция, для которой выполнены условия $f \in \mathcal{A}(D)$ и $f'(z) \neq 0$. Тогда согласно утверждению 1 п. 7.5 отображение $f(z)$ конформно в каждой точке D . Однако оно не обязано быть конформным в области D (см. примеры а) и б) п. 6.1), поскольку обратное отображение может быть неоднозначным. В п. 7.5 было приведено следующее очевидное

Утверждение. Пусть однозначная функция $f(z)$ аналитична, однолистна в D и $f'(z) \neq 0 \forall z \in D$. Тогда отображение $w = f(z)$ конформно в D .

Далее выясняется, что при условии однолистности требование $f'(z) \neq 0$ излишне.

Теорема 29.1. Однозначная функция $f(z)$, аналитическая в окрестности точки z_0 , однолистна в некоторой окрестности этой точки тогда и только тогда, когда $f'(z_0) \neq 0$.

▷ Если $f'(z_0) \neq 0$, то теорема 6.3 утверждает существование однозначной обратной функции в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$, т.е. локальную однолистность $f(z)$.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что $f'(z_0) = 0$. Тогда по теореме Тейлора в окрестности z_0 справедливо представление

$$f(z) = c_0 + c_k(z - z_0)^k + c_{k+1}(z - z_0)^{k+1} + \dots,$$

причём $c_0 = f(z_0)$, $c_k \neq 0$ при некотором $k \geq 2$.

Обозначим $\varphi(z) = f(z) - f(z_0)$, $\varphi(z) = (z - z_0)^k \psi(z)$, где $\psi(z) \in \mathcal{A}(z_0)$, $\psi(z_0) = c_k \neq 0$.

Заметим теперь, что точка z_0 не может быть предельной для нулей $f'(z)$ (иначе по теореме единственности $f'(z) \equiv 0$, а, значит, $f(z) = \text{const}$, что противоречит однолистности). Поэтому найдётся такое число $\delta_1 > 0$, что $f'(z) \neq 0$ при $0 < |z - z_0| < \delta_1$. Кроме того, в силу непрерывности $\psi(z)$ существует такое число $\delta_2 > 0$, что $\psi(z) \neq 0$ для $|z - z_0| < \delta_2$. Следовательно, при $0 < |z - z_0| \leq \rho$, где $\rho < \min\{\delta_1, \delta_2\}$, выполнены оба эти условия.

Рассмотрим на окружности $\gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$ непрерывную вещественнозначную функцию $|\varphi(z)| > 0$. Так как γ_ρ — компакт, существует $\min_{z \in \gamma_\rho} |\varphi(z)| = m$, причём $m > 0$. Стало быть, для любого такого числа $\alpha \in \mathbb{C}$, что $0 < |\alpha| < m$, справедливы неравенства:

$$|\varphi(z) - \alpha| \geq |\varphi(z)| - |\alpha| > 0, \quad \text{если } |z - z_0| = \rho.$$

В силу теоремы Руше у функции $\varphi(z) - \alpha = f(z) - f(z_0) - \alpha$ внутри круга $|z - z_0| < \rho$ столько же нулей, сколько их имеет $\varphi(z)$, то есть k . Значит, и уравнение $f(z) = c_0 + \alpha$ также имеет $k \geq 2$ корней в этом круге. Но z_0 таким корнем не является, кроме того, $f'(z) \neq 0$, так что все корни однократные. Итак, в k различных точках сколь угодно малой окрестности z_0 функция $f(z)$ принимает равные значения, что противоречит её локальной однолистности. ◁

Таким образом, аналитическая однолиственная в области D функция f осуществляет конформное отображение этой области на множество $G = f(D)$.

29.2. Сохранение области

Вернемся к рассмотрению однозначных, но, вообще говоря, не однолистных отображений.

Теорема 29.2. Пусть D – область, функция $f(z) \in A(D)$ и не равна тождественно постоянной. Тогда образ $G = f(D)$ также является областью.

▷ В соответствии с определением области требуется доказать, что: 1) G – открытое множество; 2) G – связное множество.

1) Рассмотрим произвольную точку $w_0 \in G$, пусть z_0 – один из ее прообразов в D . Так как множество D открыто, найдётся круг $\{|z - z_0| < \rho\} \subset D$. Более того, уменьшая в случае необходимости значение ρ , можно утверждать, что в замкнутом круге $\{|z - z_0| \leq \rho\}$ не содержится других прообразов точки w_0 (поскольку $f(z) \neq \text{const}$, такие прообразы должны быть изолированными точками в D в силу теоремы единственности).

Рассуждая, как в доказательстве теоремы 28.1, для функции $\varphi(z) = f(z) - w_0$ и окружности $\gamma_\rho = \{|z - z_0| = \rho\}$ заключаем, что существует $\min_{z \in \gamma_\rho} |\varphi(z)| = m > 0$.

Покажем теперь, что круг $K = \{|w - w_0| < m\} \subset G$. Действительно, для произвольной точки $w' \in K$, $w' \neq w_0$, имеем $|w' - w_0| < m$. Поскольку

$$|\varphi(z)| \Big|_{z \in \gamma_\rho} \geq m > |w' - w_0| > 0,$$

то в силу теоремы Руше уравнение

$$f(z) - w' = 0 \Leftrightarrow \rho(z) + (w_0 - w') = 0$$

имеет в круге $\{|z - z_0| < \rho\}$ столько же корней, сколько нулей внутри γ_ρ у функции $\varphi(z)$, т.е. по крайней мере один корень (точка z_0 может быть кратным нулём $\varphi(z)$).

Итак, существует такая точка z' , что $|z' - z_0| < \rho$ и $f(z') = w'$, т.е. $w' \in G$. В силу произвольности выбора $w' \in K$ получаем $K \subset G$.

2) Пусть w_1, w_2 – две произвольные точки G , а z_1 – один из прообразов w_1 в D , аналогично z_2 – один из прообразов w_2 . Так как z_1 и z_2 принадлежат связному множеству D , то существует такая непрерывная кривая $\gamma: z = \lambda(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), что $z_1 = \lambda(\alpha)$, $z_2 = \lambda(\beta)$, причём $\gamma \subset D$. Тогда $\Gamma = f(\gamma): w = f(\lambda(t))$ также является непрерывной кривой, при этом Γ соединяет точки w_1 и w_2 и принадлежит G , так что связность G доказана. ◁

29.3. Свойства конформных отображений

Отображения, обсуждаемые ниже, обладают некоторыми важными свойствами, которые формулируются как основные принципы конформных отображений.

Теорема 29.3 (принцип сохранения области). Пусть D – область, функция $f(z) \in A(D)$ и однолистка на D . Тогда образ $G = f(D)$ также является областью.

▷ Утверждение является частным случаем теоремы 29.2 ◁

Теорема 29.3 (принцип соответствия границ). Пусть D и G – ограниченные односвязные области комплексных плоскостей (z) и (w) соответственно; их границы ∂D и ∂G – замкнутые жордановы кусочно-гладкие кривые. Пусть функция $w = f(z) \in A(D) \cap C(\bar{D})$ и взаимно однозначно с сохранением ориентации отображает ∂D на ∂G . Тогда функция $f(z)$ конформно отображает D на G .

▷ Возьмём две произвольные точки $w_1 \in G$, $w_2 \notin \bar{G}$ и рассмотрим функции $F_1(z) = f(z) - w_1$ и $F_2(z) = f(z) - w_2$. Если точка z пробегает границу ∂D в положительном направлении, то конец вектора $f(z) - w_1$ обходит ∂G один раз в том же направлении, при этом вектор $F_1(z)$ поворачивается на угол 2π (см. рис. 90). Аналогично конец вектора $f(z) - w_2$ также обходит ∂G один раз, но при этом угол поворота вектора $F_2(z)$ равен нулю (рис. 91).

Заметим теперь, что $F_k(z) = f(z) - w_k \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, $F_k(z) \Big|_{z \in \partial D_1} \neq 0$ ($k = 1; 2$). Поэтому по теореме 28.2

$$N_{F_1} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} F_1(z) = 1, \quad N_{F_2} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Var}_{\partial D} \operatorname{Arg} F_2(z) = 0.$$

Это означает, что уравнение $f(z) = w_1$ имеет ровно один корень в области D , в то же время у уравнения $f(z) = w_2$ корней в D нет. Таким образом, соответствие, устанавливаемое функцией $w = f(z)$ между областями D и G , взаимно однозначное, поэтому (с учетом аналитичности $f(z)$) это отображение конформно в D $\triangleleft$

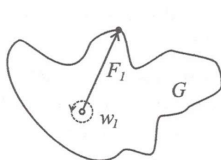


Рис. 90

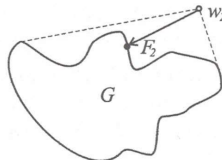


Рис. 91

29.3. Вопросы и задачи

- Докажите, что не существует конформного отображения плоскости $\mathbb{C}$ на единичный круг.
- Найдите все функции, конформно отображающие плоскость $\mathbb{C}$ на себя.
- Имеет ли место принцип сохранения области для непрерывной, отличной от константы функции $f(z)$?
Указание. Рассмотрите образ вертикального диаметра круга $D = \{|z| < 1\}$ при преобразовании $f(z) = x^2 + iy$.
- Покажите, что в теореме 29.3 требование ограниченности областей D и G существенно.

Указание. Рассмотрите области $D = \{\operatorname{Im} z > 0\}$, $G = \{\operatorname{Im} w > 0\}$, $f(z) = z^3$.

§30. Принцип максимума

30.1. Принцип максимума модуля аналитической функции

Теорема 30.1. Пусть $f(z) \in \mathcal{A}(D)$ и не является постоянной в области D . Тогда максимальное значение $|f(z)|$ не может достигаться в точке D .

$\triangleright$ Предположим противное: существует такая внутренняя точка z_0 области D , что $|f(z_0)| = \max_D |f(z)| = M$. В силу теоремы 29.2 точка $w_0 = f(z_0)$ является внутренней для области $G = f(D)$, т.е. найдется некоторая окрестность $K_0 = \{|w - w_0| \leq \rho\} \subset G$. Но тогда существует $w_1 \in K_0$, для которой $|w_1| > |w_0|$ (рис. 92). Итак, в некоторой точке $z_1 \in D$ получаем $|f(z_1)| > M$ $\triangleleft$

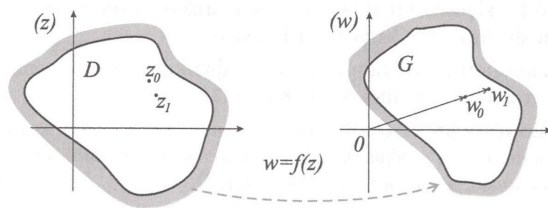


Рис. 92

Следствие 1. Если D — ограниченная область, $f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$, то $\max_D |f(z)| = \max_{\partial D} |f(z)|$.

$\triangleright$ Пусть $f(z) = u + iv$, тогда $|f(z)| = \sqrt{u^2(x, y) + v^2(x, y)}$ — по условию непрерывная в замкнутой ограниченной области функция. Следовательно, $|f(z)|$ достигает своего максимального значения на $\overline{D}$. Если $f(z)$ отлична от постоянной в D , то по доказанному максимум $|f(z)|$ достигается в граничной точке. Если же $f(z)$ — константа, требуемое равенство очевидно $\triangleleft$

Следствие 2. Пусть D – ограниченная область, $f_1, f_2 \in A(D) \cap C(\overline{D})$ и $f_1(z) = f_2(z)$ во всех точках $z \in \partial D$. Тогда $f_1(z) \equiv f_2(z)$ на D .

▷ Рассмотрим $f(z) = f_1(z) - f_2(z)$. Так как $f \in A(D) \cap C(\overline{D})$, в силу предыдущего утверждения $\forall z \in D$ имеем $|f(z)| \leq \max_{\partial D} |f(z)| = 0$, откуда $f(z) \equiv 0$ на D ◁

Следствие 3. Пусть $f(z) \in A(D)$ не является постоянной в области D и $f(z) \neq 0$. Тогда минимальное значение $|f(z)|$ не может достигаться во внутренней точке D .

▷ Утверждение следует из теоремы 30.1 и очевидного равенства $\min_D |f(z)| = \max_D \frac{1}{|f(z)|} \quad \triangleleft$

30.2. Принцип максимума и минимума гармонической функции. Задача Дирихле

Напомним, что гармонические функции и некоторые их свойства обсуждались в пп. 6.2 – 6.3.

Теорема 30.2. Отличная от константы функция $u(x, y)$, гармоническая в области D , не может достигать ни своего максимума, ни своего минимума в D .

▷ Заметим, что для данной функции $u(x, y) \in \mathcal{H}(D)$ существует такая сопряжённая функция $v(x, y) \in \mathcal{H}(D)$, что $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \in A(D)$ (теорема 6.4).

Рассмотрим $g(z) = e^{f(z)}$. Это аналитическая в области D функция, причём $g(z) \neq 0$ в D . Так как $|g(z)| = e^{u(x, y)}$, то предположение, что в некоторой точке $(x_0, y_0) \in D$ функция $u(x, y)$ принимает максимальное значение означает, что в соответствующей точке z_0 достигает своего максимума $|g(z)|$. Это может случиться только лишь при $g(z) = \text{const}$, а, значит, только если $u(x, y) = \text{const}$, что противоречит условию.

Для доказательства "принципа минимума" отметим, что

если в точке $(x_0, y_0) \in D$ функция $u(x, y) \in \mathcal{H}(D)$ принимает минимальное значение, то гармоническая функция $-u(x, y)$ имеет в (x_0, y_0) максимум ◁

Следствие 1. Если D – ограниченная область, то функция $u(x, y) \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ принимает на границе области как максимальное, так и минимальное значение.

Задача Дирихле для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$.

Требуется найти решение уравнения Лапласа в некоторой области D , непрерывное в $\overline{D}$, т.е. функцию $u(x, y) \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$, которая принимает заданные значения на границе области: $u(x, y)|_{\partial D} = h(x, y)$, где $h(x, y) \in C(\partial D)$.

Задача Дирихле разрешима не для всякой области. Однако если известно, что решение существует, а D – ограниченная область, то решение единственно. А именно, справедливо

Следствие 2. Пусть D – ограниченная область, $u_1(x, y), u_2(x, y) \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ и $u_1(x, y)|_{\partial D} = u_2(x, y)|_{\partial D}$. Тогда $u_1(x, y) = u_2(x, y)$ в $\overline{D}$.

▷ Доказательство проводится применением следствия 1 к $u(x, y) = u_1(x, y) - u_2(x, y) \in \mathcal{H}(D) \cap C(\overline{D})$ ◁

30.3. Вопросы и задачи

1. Приведите пример, показывающий существенность требования $f(z) \neq 0$ в утверждении о минимуме модуля аналитической функции (следствие 3 п. 30.1).
2. Докажите принцип минимума модуля аналитической функции непосредственно на основе теоремы 29.2.
3. Известно, что аналитическая в круге $\{|z| < 4\}$ функция $f(z)$ отвечает условиям $f(2i) = (\sqrt{5} + 2i)e^{2i}$ и $\max_{|z|=3} |f(z)| = 3$. Найдите $\text{Re } f(z)$.

4. Найдите $\max_{|z| \leq 2} |\cos z|$.
5. Для функции $f(z) \in \mathcal{A}(\{|z| < R\})$, отличной от константы, рассмотрим $g(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|$. Докажите, что $g(r)$ строго возрастает при $r \in (0; R)$.
6. Пусть D – ограниченная область с границей ∂D , $f(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$ не является постоянной в области D , но $|f(z)| \equiv \text{const}$ при $z \in \partial D$. Докажите, что существует хотя бы одна точка $z \in D$, где $f(z) = 0$.
7. Докажите утверждение (вторая теорема Вейерштрасса): Пусть D – ограниченная область, $f_n(z) \in \mathcal{A}(D) \cap C(\overline{D})$. $\forall n$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(z)$ равномерно сходится на границе области ∂D . Тогда этот ряд равномерно сходится на $\overline{D}$.
8. Вещественная гармоническая в $\mathbf{R}^2$ функция $u(x, y)$ является ограниченной сверху, т.е. при всех $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ для некоторого числа M : $u(x, y) < M$. Докажите, что $u(x, y)$ – константа.
Тот же результат имеет место для гармонической в $\mathbf{R}^2$ ограниченной снизу функции.
9. Докажите, что для гармонической в некоторой области функции $u(x, y) = u(z)$ справедлива формула среднего значения:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z + \rho e^{i\varphi}) d\varphi.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2004.
2. Леонтьева Т.А. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Научный мир. 2004.
3. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. – М.: Наука. 1978; М.: Мир. 2006.
4. Половинкин Е.С. Курс лекций по теории функций комплексного переменного. – М.: Физматкнига. 2003.
5. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч.1. – М.: Изд-во Московского ун-та. 2007
6. Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Б.Х. Математический анализ. Ч.2. – М.: Изд-во Московского ун-та. 2007
7. Волковыский Л.И. и др. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. – М.: ФИЗМАТЛИТ. 2002
8. Леонтьева Т.А., Панферов В.С., Серов В.С. Задачи по теории функций комплексного переменного. – М.: Изд-во Московского ун-та. 1992.
9. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Функции комплексного переменного. Задачи и примеры. – М.: Ком-Книга. 2006.
10. Serov V.S. Complex Analysis. – University of Oulu. 2017.

Дополнительная литература

11. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. – М.: Наука. 1984.
12. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. – М.: Наука. 1968.
13. Зверович Э.И. Вещественный и комплексный анализ. Кн. 4. Ч. 6. Теория аналитических функций комплексного переменного. – Минск: Вышэйшая школа. 2008.
14. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука. 1973; СПб.: Лань. 2002.
15. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. – М.: Наука. Т. 1, 1967; т. 2, 1968.
16. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. – М.: Наука. 1984.
17. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. В 2-х частях. – М.: Ленанд. 2015.

Ответы

Глава 1

- 1.9. 4a) $\operatorname{Re} z = -64\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = -64$, $|z| = 128$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{7\pi}{6}$; 4b) $\operatorname{Re} z = -\frac{5}{2}\sqrt{3}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{5}{2}$, $|z| = 5$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{7\pi}{6} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{7\pi}{6}$; 4c) $\operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{Im} z = -\frac{3}{2}$, $|z| = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $\operatorname{Arg} z = \{-\arctg 3 + 2\pi n\}$, $\arg z = 2\pi - \arctg 3$; 4d) $\operatorname{Re} z = 0$, $\operatorname{Im} z = -4$, $|z| = 4$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$; 4e) $\operatorname{Re} z = \frac{\sqrt{3}}{8}$, $\operatorname{Im} z = \frac{1}{8}$, $|z| = \frac{1}{4}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{\pi}{6} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{\pi}{6}$; 4f) $\operatorname{Re} z = -128$, $\operatorname{Im} z = -128$, $|z| = 128\sqrt{2}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{5\pi}{4} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{5\pi}{4}$; 4g) $\operatorname{Re} z = -3\sin 5$, $\operatorname{Im} z = -3\cos 5$, $|z| = 3$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{3\pi}{2} - 5 + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{7\pi}{2} - 5$; 4h) $\operatorname{Re} z = -2\cos^2 \frac{\pi}{14}$, $\operatorname{Im} z = \sin \frac{\pi}{7}$, $|z| = 2\cos \frac{\pi}{14}$, $\operatorname{Arg} z = \left\{ \frac{13\pi}{14} + 2\pi n \right\}$, $\arg z = \frac{13\pi}{14}$; 4i) $\operatorname{Re} z = \cos \alpha$, $\operatorname{Im} z = \sin \alpha$, $|z| = 1$, $\operatorname{Arg} z = \{\alpha + 2\pi n\}$ (везде $n \in \mathbf{Z}$). 8. Верно только c). 9a) $\operatorname{Im} a_n = 0$; 9b) $\operatorname{Re} a_n = 0$. 11a) $2(\sqrt{3}-i)$, i , $-2(\sqrt{3}+i)$; 11b) $\pm(\sqrt{3}-i)$; 11c) $1+i$, $\sqrt{2}\left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12}\right)$, $\sqrt{2}\left(\cos \frac{5\pi}{12} - i \sin \frac{5\pi}{12}\right)$. 13a) $\pm 1 \pm i$ (все варианты); 13b) ± 2 , $\pm\sqrt{3} \pm i$ (все варианты); 13c) $-3i$, $\frac{3}{2}(\pm\sqrt{3}+i)$; 13d) $\pm(\sqrt{3}+i)$, $\pm(1-i\sqrt{3})$; 13e) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\pm(1-i)$; 13f) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, $\pm\sqrt{2}i$; 13g)

$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i), \pm \sqrt{2}(1-i); 13h) \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i), -2i, \pm \sqrt{3}+i;$
 $13i) 0, -1, \frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3}); 13j) t(\sqrt{3} \pm i), t \in \mathbf{R}; 13k) 0, \pm 2,$
 $\pm 2i; 13l) 0, \pm \sqrt{2}(1+i); 13m) 0, \pm 1; 13n) 0; 13o) e^{\frac{2\pi k}{n}i},$
 $k=1, 2, \dots, n-1. 18. r_1 r_2 = 1.$

2.4. 2a) $(a+i)z + (a-i)\bar{z} = 0$; 2b) $z^2 + (\bar{z})^2 = a^2$; 2c) $z\bar{z} - z - \bar{z} - 1 = 0$. 4. Нет; да. 5w). Указание. См. решение примера 2d) п. 2.3. 6a) Области: a), h), j), m), o), s); 6b) все области односвязны в $\mathbf{C}$, кроме o).

3.3. 1, 2. Только в случаях $z_n \rightarrow 0$ и $z_n \rightarrow \infty$. 4. Нет. 6a) $2+3i$; 6b) 0 ; 6c) 0 ; 6d) 0 ; 6e) не существует; 6f) 0 ; 6g) $\cos 2 + i \sin 2$; 6h) $-i\pi$; 6i) 0 . 7a) $\left\{|z| < \frac{1}{2}\right\} \cup \left\{-\frac{i}{2}\right\}$; 7b) $\mathbf{C}$ исключая $\{|z|=1, z \neq 1\}$; 7c) $\{|z| < 1\}$ при $k \in \mathbf{Z}$, $\{|z|=1\}$ при $k < 0, z=1$ при $k \leq 0$. 8a) Расходится; 8b) сходится; 8c) сходится; 8d) расходится; 8e) сходится.

4.5. 1a) $\operatorname{Re} c = -3 \sin 5, \operatorname{Im} c = -3 \cos 5, |z| = 3, \operatorname{Arg} z = \left\{-\frac{\pi}{2} - 5 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}\right\}, \arg z = \frac{7\pi}{2} - 5$; 1b) $\operatorname{Re} c = -2e^4 \cos 5,$
 $\operatorname{Im} c = -2e^4 \sin 5, |z| = -2e^4, \operatorname{Arg} z = \{\pi + 5 + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}\}, \arg z = 5 - \pi$. 2a) $\operatorname{Re} c = \cos 1 \operatorname{ch} 3, \operatorname{Im} c = \sin 1 \operatorname{sh} 3$;
 2b) $\operatorname{Re} c = \cos 1 \operatorname{sh} 3, \operatorname{Im} c = \sin 1 \operatorname{ch} 3$; 2c) $\operatorname{Re} c = 1 + \ln 2,$
 $\operatorname{Im} c = \frac{3\pi}{2}$; 2d) $\operatorname{Re} c = 2 \ln 2, \operatorname{Im} c = \frac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in \mathbf{Z}$. 7a)
 $\pi n, n \in \mathbf{Z}$; 7b) $2\pi n - i \ln(\sqrt{2}-1), (2n+1)\pi - i \ln(\sqrt{2}+1), n \in \mathbf{Z}$;
 7c) $i\left(\frac{\pi}{2} + \pi n\right), n \in \mathbf{Z}$; 7d) $i\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi n\right), i\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi n\right),$
 $n \in \mathbf{Z}$. 8. Нет. 11. Нет. 13a) $-2i$; 13b) $-2i$. 15a) Непрерывна;
 15b) непрерывна на $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}^+$; 15c) непрерывна; 15d) непрерывна;
 15e) непрерывна; 15f) непрерывна на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$;
 15g) непрерывна на $\mathbf{C} \setminus \{0\}$. 16. Нет. 17a) Нет; 17b) нет;
 17c) нет; 17d) да; 17e) нет; 17f) да. 18) Да на E_1 , нет на E_2 .

5.4. 5a) Не дифференцируема; 5b) дифференцируема в $\mathbf{C}$, $f'(z) = 2z$; 5c) дифференцируема, $f'(z) = -\frac{1}{z^2}, z \neq 0$;
 5d) не дифференцируема; 5e) дифференцируема в $z = 0$, $f'(0) = 0$;
 5f) дифференцируема в $z = 0, f'(0) = 0$; 5g) дифференцируема в $z_n = \frac{\pi}{2} + \pi n, f'(z_n) = i(-1)^{n-1} \operatorname{sh} y$;
 5h) дифференцируема в $\mathbf{C}, f'(z) = -2z \sin(z^2)$; 5i) дифференцируема при $|z| = \sqrt{\pi n}, n \in \mathbf{Z}, n \geq 0, f'(z) = 0$; 5j) дифференцируема на прямых $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, либо $\operatorname{Im} z - \operatorname{Re} z = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, где $n \in \mathbf{Z}$.

6.4. 1. Нет, нет. 4a) $a+b=0, c=1$; 4b) $a+b=-1$. 5a) Дифференцируемость при $z=0$, нет аналитичности; 5b) дифференцируемость при $z=0$, нет аналитичности; 5c) дифференцируемость при $z=0$, нет аналитичности; 5d) дифференцируемость при $\operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z$, нет аналитичности; 5e) дифференцируемость при $\operatorname{Re} z = 0$, нет аналитичности; 5f) нет дифференцируемости; 5g) нет дифференцируемости; 5h) дифференцируемость при $\operatorname{Im} z = 1$, нет аналитичности; 5i) дифференцируемость при $z \in \left\{\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z = \pi n\right\} \cup \left\{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z = \pi n\right\}, \operatorname{Re} z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \operatorname{Im} z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k, n \in \mathbf{Z}$, нет аналитичности; 5j) аналитичность при $\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0$, дифференцируемость также при $z=0$; 5k) аналитичность при $2\pi n < \operatorname{Im} z < (2n+1)\pi$, дифференцируемость также при $z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)i, n \in \mathbf{Z}$. 6a) Да; 6b) нет. 10a) $f(z) = z^2 + 2z - i + C, C \in \mathbf{R}$; 10b) $f(z) = z^3 - iz - iC, C \in \mathbf{R}$; 10c) не существует; 10d) $f(z) = \frac{2i}{z} + C, C \in \mathbf{R}$; 10e) $f(z) = \sin z + iz + iC, C \in \mathbf{R}$; 10f) $f(z) = ie^z - z$; 10g) $f(z) = -z^2 + 3z$; 10h) $f(z) = Ce^{iz^2}, C \in \mathbf{R}$; 10i) $f(z) = e^{iC} e^{-iz^2}, C \in \mathbf{R}$; 10j) нет; 10k) $f(z) = Ciz^2, C \in \mathbf{R}$.

Глава 2

7.7. 1a) $|z-i| < \frac{1}{2}$; 1b) $0 < |z+i| < \sqrt{2}$. 2a) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{3\pi}{2}$; 2b) $|z| > \frac{1}{2}$, $\arg z = \pi k$, $k = 0, 1$; 2c) $\frac{1}{\sqrt{3}} \leq |z| < \sqrt{3}$, $\arg z = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, 1$; 2d) $|z| = \frac{1}{2}$, $\pi k < \arg z < \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k = 0, 1$. 3a) $w = \frac{1}{3}(-3+2i)z + \frac{4}{3}(-1+2i)$; 3b) $w = 2z$, $k = 0, 1$. 4a) π ; 4b) $\frac{8}{3}$. 5a) $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$; 5b) $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha = 2\pi$; 5c) например, $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2}$; 5d) например, $\operatorname{Im} z > 0$ либо $|z| < 1$. 6a) Да; 6b) нет. 7a) $\alpha < \arg z < \beta$, $\beta - \alpha = \pi$; 7b) $\alpha < \operatorname{Im} z < \beta$, $\beta - \alpha = \frac{2\pi}{3}$; 7c) например, $|\operatorname{Im} z| < \frac{\pi}{4}$. 8. $\{|w+7| < 10\}$. 9. Для 1): а) дважды проходящая окружность $|w| = 4$; б) $\arg w = \frac{\pi}{2}$; в) $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$. Для

2): а) окружность $|w| = \frac{1}{2}$, проходимая в противоположном направлении; б) $\arg w = -\frac{\pi}{4}$; в) $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$.

8.7. 2a) $w = \frac{z-a}{b-a}i$; 2b) $w = \frac{z-ai}{b-a}(1-i)$. 3a) $w = 2iz$; 3b) $w = -\frac{12i}{z}$. 5a) $\frac{1}{5}(2+i)$; 5b) $\frac{9}{5}(2+i)$; 5c) $\frac{9}{2}+i$; 5d) ∞ . 6a) $|w - \frac{1}{2}| = \frac{1}{2}$; 6b) $|w+i| = \sqrt{2}$; 6c) $|w - \frac{5}{3}| = \frac{4}{3}$. 7a) $w = -\frac{2i}{z}$; 7b) $w = -\frac{z+2}{z+2i}$; 7c) $w = -2i\frac{z-i}{z+i}$; 7d) $w = i\frac{z+2}{3z}$; 7e) $w = \frac{2z-4}{5-z}$; 7f) $w = \frac{z-2i}{4-iz}$; 7g) $w = \frac{z-i}{z+i}$; 7h) $w = \sqrt{2}$. 7i) $w = -i\frac{z-i}{z-i}$; 7j) $w = i\frac{z+i}{z-i}$; 7k) $w = \frac{3z+2i}{z-2i}$. 7l) $w = \frac{2iz+i}{3z-i}$; 7m) $w = \frac{z(1+i)+2(1-i)}{z-2}$.

9.5. 2a) $\operatorname{Re} w = c^2 - \frac{1}{4c^2}(\operatorname{Im} w)^2$, если $c \neq 0$; $\operatorname{Re} w \leq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$, если $c = 0$; 2b) $\operatorname{Re} w = \frac{1}{4c^2}(\operatorname{Im} w)^2 - c^2$, если $c \neq 0$; $\operatorname{Re} w \geq 0$, $\operatorname{Im} w = 0$, если $c = 0$; 3a) (1) - да, (2) - нет, (3) - нет; 3b) (1) - нет; (2) - да для $F(z) = \sqrt{i+g_k(z)}$, где $g_k(z) = \sqrt[4]{z}$ - однозначная регуляризация ветви при $k = 1, 2, 3$; нет для $k = 4$, где $g_4(1) = -i$; (3) - да. 4. $f(z) = -\sqrt[4]{|z|}e^{i\frac{\arg z}{4}}$; $\{|w| < \sqrt{2}, \pi < \arg w < \frac{5\pi}{4}\}$. 5a) $w = \sqrt{\frac{z-a}{1-z}}$; 5b) $w = \sqrt{\frac{z-a}{z+a}}$; 5c) $w = \sqrt{\frac{z+i}{iz+1}}$; 5d) $w = \left(\frac{z^2-4}{z^2+4}\right)^2$; 5e) $w = \left(\frac{z+3i}{z-3i}\right)^2$; 5f) $w = \sqrt{\frac{z^6+1}{z^6+64}}$; 5g) $w = \sqrt{\left(\frac{z^{2/3}+1}{z^{2/3}-1}\right)^2 + 3}$; 5h) $w = -\left(\frac{2z+\sqrt{3}-i}{2z-\sqrt{3}-i}\right)^3$ (для задач 5a)-5h) приведены возможные ответы). 10.5. 3. $\{\operatorname{Re} w < 0, 2\pi i < \operatorname{Im} w < 3\pi i\}$. 5a) $w = \sqrt{\frac{e^{4z}}{e^{4z}+1}}$; 5b) $w = \left(\frac{e^{z/2}-e}{e^{z/2}+e}\right)^2$; 5c) $w = e^{\frac{2\pi iz}{z-2i}}$; 5d) $w = e^{\frac{2\pi i}{3}\frac{z+i}{z-i}}$; 5e) $w = e^{-\frac{6\pi i}{z}}$; 5f) $w = \sqrt{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{z}{2}}$; 5g) $w = \sqrt{\left(\frac{ie^{\frac{z}{2}}-1}{ie^{\frac{z}{2}}+1}\right)^2 + 1}$; 5h) $w = -\operatorname{ctg}^2 \frac{4\pi}{z}$; 5i) $w = \sqrt{\frac{1}{3} - \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi}{z}}$ (для задач 5a)-5i) приведены возможные ответы). 11.4. 5a) $w = \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{z}{2} + \frac{2}{z}\right)^2 + \frac{25}{36}}$; 5b) $w = \frac{2(z^2+1)}{\sqrt{4z^4+17z^2+4}}$; 5c) $w = \sqrt{\frac{2z^2+5z+2}{-2z^2+5z-2}}$; 5d) $w = \sqrt{\frac{5(z^2+2z+1)}{2(2z^2+5z+2)}}$; 5e) $w =$

$$\sqrt{\operatorname{ch} 4z + \operatorname{ch} 4}; 5f) w = -\operatorname{ch} \frac{2\pi}{z}; 5g) w = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{257}{16} - \frac{z^4}{16} - \frac{16}{z^4}};$$

$$5h) w = \sqrt{\operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch}(z-1)} \quad (\text{приведены возможные ответы}).$$

Глава 3

12.4. 2. $b-a$; длина кривой l . 3a) $\frac{2}{3}(3+4i)$; 3b) $\frac{13}{6} + \frac{12}{5}i$;
 3c) $\frac{r^{n+1}}{n+1}(1+(-1)^n)$ при $n \neq -1$; πi при $n = -1$; 3d) $4 -$
 $4 \ln 2 - 10\pi i$; 3e) $\frac{3}{4}a^2\pi i$. 4a) 2; 4b) $-\frac{4\sqrt{2}(2\sqrt{3}-1)}{3}(1+i)$.
 13.4. 1a) π ; 1b) 0; 1c) 0. 2. $2\operatorname{sh}(\sin 2)$. 3. $2i$. 4. 0.
 14.4. 1a) $-\pi$; 1b) πe^{-2i} ; 1c) 0; 1d) $\pi(e^{-2i}-1)$. 2a) $-\frac{2\pi}{3}i$;
 2b) $-\frac{2\pi}{3}i$; 2c) 0; 2d) $-\frac{4\pi}{3}i$; 3a) 0; 3b) $\frac{\pi^2}{4}(1+i)$. 4. $i(4-z)$.
 15.5. 1a) $\frac{\pi i}{12}$; 1b) $\frac{\pi}{16}(\sin 2 - \cos 2)$; 1c) $\frac{\pi i}{2}(\sin 1 + 2\cos 1)$.
 2. $\frac{\pi}{8}(\pi^2 - 3 + 3\pi i)$. 3. $\cos z - \frac{1}{2}z \sin z$. 4. $-\frac{i}{\pi} \sin z + 1$.
 16.4. 1a) $\frac{1}{a} \sin az + C$ при $a \neq 0$; $z + C$ при $a = 0$; 1b)
 $\frac{1}{a} \operatorname{ch} az + C$ при $a \neq 0$; C при $a = 0$; 1c) $\frac{e^z}{1+a^2}(\sin az -$
 $a \cos az) + C$; 1d) $-\frac{1}{2} \cos(z^2) + C$; 1e) $(z^2+2) \operatorname{sh} z - 2z \operatorname{ch} z +$
 C . 2a) Да, нет; 2b) нет; 2c) нет; 2d) да, да; 2e) нет, нет;
 2f) да, нет; 2g) нет, нет; 2h) да, нет, нет; 2i) нет; 2j) нет.

Глава 4

17.3. 1. Нет. 2. Нет. 5a) $\{|z| < 1\}$; $\{|z| \leq q < 1\}$; 5b)
 $\{\operatorname{Re} z > 0\}$; $\{\operatorname{Re} z \geq \epsilon > 0\}$. 7. $f'(0) = \frac{1}{2}$.
 18.5. 1a) $|z-1+i| < 3$; ряд сходится в z_1 и z_2 ; 1b) $|z-i| < 1$;
 расходится в z_1 и сходится в z_2 . 2. Нет. 3a) $|z+i| < 1$; 3b)

$|z+2| < +\infty$; 3c) $|z - \frac{i}{2}| < \frac{1}{2}$; 3d) $|z| < \sqrt[3]{2}$; 3e) $|z| < +\infty$,
 если $|a| < 1$; $|z| < 1$, если $|a| = 1$; $R = 0$, если $|a| > 1$;
 3f) $|z| < 1$, $a \neq 0$. 4. Сходится, если $|z| \leq 1$, $z \neq -i$.
 5a) $+\infty$; 5b) R ; 5c) $\frac{R}{3}$. 7a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$, $R = +\infty$;
 7b) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n-1}}{(2n)!} z^{2n}$, $R = +\infty$; 7c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^n}{b^{n+1}} z^n$, $R = \left| \frac{b}{a} \right|$;
 7d) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^n$, $R = 1$; 7e) $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{4^n} - 1 \right) z^n$, $R = 1$;
 7f) $\sum_{n=1}^{\infty} n z^{3n-1}$, $R = 1$; 7g) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n}{n!} \cos \frac{\pi n}{4} z^n$, $R = +\infty$. 8a)
 $\sin 1 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (z-1)^{2n} + \cos 1 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (z-1)^{2n-1}$, $R =$
 $+\infty$; 8b) $\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{4}{5^{n+1}} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z-1)^n$, $R = 2$; 8c) e^{2i} .
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} (z-1)^n$, $R = +\infty$. 9a) $\sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^{n+1} 2^n - \frac{1}{4^{n+1}} \right) z^{2n}$,
 $|z| < \frac{1}{\sqrt{2}}$; 9b) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(2^{2(n-1)} - \frac{(-1)^n}{2^n} \right) \cdot \frac{1}{z^{2n}}$, $|z| > 2$. 11. Нет,
 да, да. 13a) $-\ln(1-z)$; 13b) $\frac{2(z-1)}{(z-3)^2}$; 13c) $\frac{z(z+1)}{(1-z)^3}$.

19.3. 1a) 4; 1b) 4; 3; 1c) 1; 3; 1d) 3; 1e) 3; 2. 2. Нуль
 порядка $k-m$. 3a) Нуль порядка m ; 3b) Нуль порядка $k+$
 m . 3c) Нуль порядка $k-m$. 8a) Да; 8b) нет; 8c) нет; 8d)
 да; 8e) нет; 8f) да; 8g) нет.

20.5. 3a) $|z+1| < \sqrt{7}$; 3b) $|z-i| < \sqrt{5-2\sqrt{3}}$. 3a) 2π ;
 3b) $+\infty$. 5. $R \geq \min\{R_1, R_2\}$. 6. Нет.

Глава 5

- 21.4. 1a) $1 < |z + 2i| < 3$; 1b) $0 < \left| z - \frac{i}{2} \right| < \frac{1}{2e}$; 1c) $\frac{1}{e} < |z| < e$; 1d) $\frac{1}{4} < |z - i| < 3$. 2a) Да, нет; 2b) нет, да; 2c) да, да, нет; 2d) да, нет; 2e) нет, нет; 2f) да*, нет, да*) (при надлежащем выборе значений $\arg z$). 3a) $\frac{4}{3} \frac{1}{z + 4} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+4)^n}{3^{n+2}}$, $0 < |z+4| < 3$; 3b) $e \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{n!} \frac{1}{(z-2)^n}$, $z \neq 2$; 3c) $\sum_{n=-2}^{+\infty} \frac{(n+3)(-1)^n}{2^{n+4}} (z-1)^n$, $0 < |z-1| < 2$; 3d) $\sin 1 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} \frac{3^{2n}}{(z-2)^{2n}} + \cos 1 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} \frac{3^{2n-1}}{(z-2)^{2n-1}}$, $z \neq 2$. 4a) $\frac{1}{5} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^{n-1}}{(z+1)^n} - \frac{1}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}} (z+1)^n$, $D = \{2 < |z+1| < 3\}$; 4b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n z^{2n}} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}$, $\frac{1}{\sqrt{2}} < |z| < 2$; 4c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)2^{n-2}}{(z+1)^n}$, $|z+1| > 2$. 5. $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{z^{2n}} - \frac{z^{2n+1}}{5^{2n+1}} \right)$, $1 < |z+1| < \sqrt{5}$.

- 22.4. 2a) $z = 0 - \pi i$, $z = 1 - \text{с.о.т.}$, $z = \infty - \text{с.о.т.}$; 2b) $z = \pm \pi - \text{у.о.т.}$, $z = \infty - \text{с.о.т.}$; 2c) $z = 0 - \text{у.о.т.}$, $z = \pi n$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} - \text{с.о.т.}$, $z = \infty - \text{н.о.т.}$ (неизолированная о.т.); 2d) $z = 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z} - \text{у.о.т.}$, $z = \pi + 2\pi n$, $n \in \mathbf{Z} - \pi i$, $z = \infty - \text{н.о.т.}$; 2e) $z = \pm 2i - \pi i$, $z = \ln 2 + i\pi(1 + 2n)$, $n \in \mathbf{Z} - \pi i$, $z = \infty - \text{н.о.т.}$; 2f) $z = 0 - \text{у.о.т.}$, $z = \pm 3i - \pi i$, $z = \infty - \text{с.о.т.}$; 2g) $z = \frac{1}{\pi n}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\} - \pi i$, $z = 0 - \text{н.о.т.}$, $z = \infty - \pi i$; 2h) $z = i - \text{с.о.т.}$, $z = (1 + 4n)i$, $n \neq 0 - \pi i$, $z = \infty - \text{н.о.т.}$ 3. Нет. 4a) у.о.т.; 4b) $\Pi(k+1)$; 4c) с.о.т. 5a) у.о.т.; 5b) у.о.т.; 5c) с.о.т. или полюс. 6a) πi ; 6b) с.о.т.; 6c) у.о.т. 7. Нет.

Глава 6

- 23.5. 1. Да. 2. Да. 3. $2(c_0 c_{-1} + c_1 c_{-2})$. 4. Нет. 7a) $\text{res}_{z_k} f(z) = \frac{1}{2}$, где $z_k = \sqrt[4]{-i}$; $\text{res}_{z=\infty} f(z) = -2$; 7b) $\text{res}_{z=\pi i} f(z) = \frac{i}{4\pi^3}$, $\text{res}_{z=-\pi i} f(z) = -\frac{i}{4\pi^3}$, $\text{res}_{z=\infty} f(z) = 0$; 7c) $\text{res}_{z=0} f(z) = 0$, $\text{res}_{z_k} f(z) = 1$, где $z_k = 2\pi k i$, $k \in \mathbf{Z}$, $k \neq 0$; 7d) $\text{res}_{z=1} f(z) = -e^{-1}$, $\text{res}_{z=\infty} f(z) = 1$, $\text{res}_{z=0} f(z) = e^{-1} - 1$; 7e) $\text{res}_{z=0} f(z) = \text{res}_{z=\infty} f(z) = 0$; 7f) $\text{res}_{z=0} f(z) = -\frac{1}{3}$, $\text{res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{3}$. 8. $\text{res}_{z=1} f_1(z) = \frac{1}{2}$, где $\sqrt{1} = 1$; $\text{res}_{z=1} f_2(z) = -\frac{1}{2}$, где $\sqrt{1} = -1$. 9a) -4 ; 9b) 8 ; 9c) $\sin 1$; 9d) 1 ; 9e) $-\text{sh } 1$; 9f) 1 . 10a) n ; 10b) $-k$. 11a) $\frac{1}{4e(z+1)^2} + \frac{1}{2e(z+1)}$; 11b) $\frac{i}{4(z-i)^2} + \frac{3}{8(z-i)}$; 11c) $\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{z-1}$; 11d) $\frac{1}{16(z-2)^2} + \frac{1}{32(z-2)}$. 24.4. 1a) 0 ; 1b) $\frac{\pi i}{60}$; 1c) $4\pi i$; 1d) $-i\pi \sin 1$; 1e) $\frac{\pi}{2}(1 + \pi i)$; 1f) $-\frac{2\pi i}{283} \cos \frac{1}{3}$; 1g) $3\pi i$; 1h) $\frac{2\pi}{3} i$; 0; 1i) 0 ; 1j) $-2\pi i \cos 1$; 1k) 0 . 2. a) -2 . 3a) $\frac{\pi}{3}$; 3b) $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$; 3c) $\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$; 3d) $\frac{\pi}{2\sqrt{35}}$; 3e) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$; 3f) $\frac{2\pi}{1-a^2}$; 3g) $\frac{\pi}{9}$; 3h) $\frac{2\pi a}{(\sqrt{a^2-b^2})^3}$. 25.4. 1a) $\frac{5\pi}{12}$; 1b) $\frac{\pi}{8a}$; 1c) $\frac{\pi}{54}$; 1d) $\frac{5\pi}{6}$; 1e) $-\frac{\pi i}{6}$; 1f) 0 ; 1g) $-\frac{\pi}{3}$. 2a) $\frac{\pi}{e^3} (\cos 6 - \sin 6)$; 2b) $\frac{\pi}{2e^4}$; 2c) $\frac{5\pi}{27} e^{-9} \cos 3$; 2d) $-\frac{3\pi}{2e^2} \cos 4$; 2e) $\frac{\pi}{e^{\sqrt{2}}} \cos 2$; 2f) $\frac{2\pi}{\sqrt{31}} e^{-\sqrt{31}} \cos 4$. 3a) $\frac{\pi}{5} \left(\frac{2}{e} + \sin 2 \right)$; 3b) $\frac{\pi}{4} (\cos 2 - e^{-2})$; 3c) $\frac{\pi}{8} (1 - e^{-2})$; 3d) 0 ; 3e) $\frac{\pi}{8}$; 3f) πi . 4a)

Полуплоскость $\{\operatorname{Im} z < 0\}$; 4b) полуплоскость $\{\operatorname{Re} z > 0\}$.

26.6. 1a) $\frac{\pi}{2} (|a| - |b|)$; 1b) $\frac{3\pi}{8}$. 2a) $\frac{\pi}{2n \cos \frac{\pi}{2n}}$; 2b) $\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$;
 2c) $\pi \left(\frac{1}{\sin a\pi} - \frac{1}{\sin b\pi} \right)$; 2d) $\frac{\pi(1-2^{p-1})}{\sin p\pi}$, если $p \neq 1$; $\ln 2$,
 если $p = 1$; 2e) $\frac{\pi^3}{8}$; 2f) $\frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}}$; 2e) $\frac{\pi^2}{2}$. 3a) $\frac{3^{p-1}\pi}{2 \cos \frac{\pi p}{2}}$; 3b)
 $\frac{p\pi 2^{p-1}}{\sin p\pi}$, если $p \neq 0$; $\frac{1}{2}$, если $p = 0$; 3c) $\frac{\pi}{2^p \sin p\pi}$; 3d) $\frac{\pi^3}{8}$;
 3e) $-\frac{\ln 2}{12}\pi$; 3f) 0. 4a) $\frac{\Gamma(p)}{a^p} \sin \frac{p\pi}{2}$; 4b) $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$; $\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$.

27.3. 1a) $\frac{\pi}{2}$; 1b) $\frac{\pi}{4}$; 1c) $\frac{\pi^3}{32}$; 1d) $\frac{\pi^2 \cos a\pi}{\sin^2 a\pi}$; 1e) $\frac{\pi}{2a^3 \operatorname{sh} a\pi}$
 $+\frac{\pi^2 \operatorname{ch} a\pi}{2a^2 \operatorname{sh}^2 a\pi}$. 2a) $\frac{1}{2a^2} (1 - a\pi \operatorname{ctg} a\pi)$; 2b) $\frac{\pi^2}{8}$; 2c) $\frac{\pi^2}{\sin^2 a\pi}$;
 2d) $\frac{1}{96}\pi^4$. 3a) $\frac{\pi^2}{6}$; 3b) $\frac{7}{720}\pi^4$.

Глава 7

28.4. 2a) $ng(z_0)$; 2b) 0. 3a) $-lg(z_0)$; 3b) 0. 4a) 1; 0;
 -3; 4b) -3; 0; -4. 5a) -6; 5b) 2. 8a) 7; 8b) 5; 8c) 12;
 8d) 1.

29.3. 2. Множество линейных функций. 3. Нет.

30.3. 1. Например, $f(z) = z$, $D = \{|z| < 1\}$. 3. $\sqrt{5} \cos 2 -$
 $2 \sin 2$. 4. $\operatorname{ch} 2$.

Учебное издание
Григорьев Евгений Александрович
ВВЕДЕНИЕ В КОМПЛЕКСНЫЙ АНАЛИЗ:
теория и практика
Учебное пособие

Издательский отдел
Факультета вычислительной математики и кибернетики МГУ
имени М.В. Ломоносова
Лицензия ИД N 05899 от 24.09.01 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ имени М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус

Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е. М. Бугачева*
Обложка: *В. В. Кононов*

Напечатано с готового оригинал-макета
Подписано в печать 10.12.2018 г.
Формат 60х90 1/16. Усл.печл. 19,0.
Тираж 500 экз. Изд. № 303.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.
119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы, МГУ им. М.В. Ломоносова,
2-й учебный корпус, 527 к.
Тел. 8(495)939-3890/91. Тел./Факс 8(495)939-3891

Отпечатано с готового оригинал-макета
в АО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская область, г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
Сайт: www.chpd.ru, E-mail: sales@chpd.ru, тел. 8 (499)270-73-59.
Заказ № 15992